

# MỘT GIẢI PHÁP DẠY HỌC TIẾT BÀI TẬP HỖ TRỢ HỌC SINH YẾU MÔN TOÁN (CHỦ ĐỀ TÌM TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP)

AN EFFECTIVE ACTION FOR MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING (THEME ON FINDING THE CENTER OF A SPHERE WHICH PASSES THROUGH THE VERTICES OF A PYRAMID)

Hoa Ánh Tường<sup>1</sup>

## Tóm tắt

*Trong bài viết này, trước tiên, chúng tôi đề cập một số đặc điểm và nguyên nhân của học sinh (HS) yếu môn toán, sau đó đưa ra một giải pháp hỗ trợ các em thông qua bài toán gốc, từ bài toán gốc này đề xuất bài toán tương tự hoặc mở rộng bài toán giúp các em trong việc tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.*

*Từ khóa: học sinh yếu toán, tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bài toán gốc.*

## Abstract

*This article is first to present the characteristics and causes of students who have poor mathematics performance in order to propose a solution to the improvement of their learning in mathematics through the original (basic) exercise. This exercise is the basis for a similar or more advanced exercise. This will enable to improve their mathematical thought/ skills in finding the center of a sphere which passes through the vertices of a pyramid.*

*Keywords: Students have poor mathematics performance, to find the center of a sphere which passes through vertices of a pyramid, original (basic) exercise.*

## 1. Mở đầu

Trong quá trình dạy học toán ở bậc Trung học Phổ thông, chúng tôi nhận thấy học sinh (HS) rất sợ môn Hình học, đặc biệt là hình học không gian. Học sinh yếu Toán chưa biết vận dụng lý thuyết vào giải bài toán có thể kể đến nhiều nguyên nhân như chưa hiểu lý thuyết, không biết vận dụng lý thuyết, không biết bắt đầu giải bài toán từ đâu,... Một số HS có tư tưởng nóng vội, không nắm vững lý thuyết, xem thường các bài toán cơ bản vốn có thể xem là bài toán gốc giúp các em giải các bài toán khó hơn. Với đối tượng là HS yếu môn Toán, việc rèn luyện cho HS phát hiện được dạng bài toán tức là tăng cường hình thức tái hiện tường minh rất quan trọng. Điều đó có nghĩa là HS biết quy bài toán đã cho về các bài toán đã biết cách giải. Trong bài viết này, chúng tôi đề cập một số bài toán liên quan đến chủ đề tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp với mục đích: minh họa một số dạng toán cơ bản thể hiện việc vận dụng định nghĩa và phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nhằm giúp các em HS nắm vững phương pháp giải toán và vận dụng vào các bài toán tương tự hoặc khó hơn.

## 2. Nội dung

### 2.1. Đặc điểm và nguyên nhân của học sinh yếu môn Toán

Theo Nguyễn Bá Kim (2007), “Sự yếu kém môn Toán ở HS có nhiều biểu hiện, nhưng về cơ bản thường có ba đặc điểm cơ bản sau:

- Nhiều “lỗ hổng” về tri thức, kỹ năng;
- Tiếp thu chậm;
- Phương pháp học tập toán chưa tốt”.

Ngoài ra, khả năng tư duy về toán ở một số HS còn hạn chế, HS không có đủ thời gian để suy nghĩ tìm hướng giải quyết cho bài toán. Giáo viên (GV) đôi khi còn chưa quan tâm đến HS, phương pháp dạy học chưa phù hợp với HS chẳng hạn: khai thác bài toán quá sâu, quá khó, giao bài tập về nhà quá nhiều, còn nôn nóng dạy quá nhiều kiến thức,...; điều này đôi khi ảnh hưởng đến HS yếu môn toán.

### 2.2. Phương hướng hỗ trợ cho học sinh yếu kém môn Toán

Có thể giúp HS yếu kém môn Toán bằng những cách sau đây:

- a) Đảm bảo trình độ xuất phát

GV giúp HS nắm vững các bài toán cơ bản, tăng cường hình thức tái hiện tường minh, tập cho HS phân tích bài toán để tìm hướng giải bài toán và tư duy tại sao giải bài toán như thế.

- b) Hướng dẫn HS biết cách lấp “lỗ hổng” về kiến thức, kỹ năng

<sup>1</sup> Tiến sĩ, Trường Trung học Thực hành Sài Gòn (Đại học Sài Gòn)

GV tập cho HS ý thức tự phát hiện và lập đây những “lỗ hổng” kiến thức của bản thân bằng cách: tự hệ thống kiến thức liên quan cho từng tiết học, tự tra cứu sách vở, tài liệu để tìm các thông tin có liên quan đến kiến thức,...

c) Luyện tập vừa sức HS yếu kém

GV gia tăng phù hợp số lượng bài tập cùng thể loại và cùng mức độ.

### 2.3. Nội dung minh họa

Trong phần trình bày này, chúng tôi minh họa bài toán gốc liên quan đến chủ đề tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Bên cạnh đó, chúng tôi nêu lên cách vận dụng từ bài toán gốc, có những bình luận dưới góc độ thực hành giải toán nhằm giúp người đọc thấy rõ hơn hiệu quả của bài toán gốc được sử dụng qua các bài toán tương tự hoặc mở rộng.

#### Trường hợp 1. Các điểm cùng nhìn một cạnh dưới góc $90^\circ$

**Xét bài toán 1:** Cho  $A, B$  cố định. Tập hợp các điểm  $M$  di động trong không gian sao cho góc  $AMB$  bằng  $90^\circ$  là mặt cầu đường kính  $AB$ . Nói cách khác: cho hai điểm  $A, B$  cố định, điểm  $M$  di động sao cho tam giác  $ABM$  vuông tại  $M$  thì  $M$  thuộc mặt cầu đường kính  $AB$ .

#### Vận dụng:

Nếu các tam giác  $ABM, ABN, ABC$  là các tam giác vuông có chung cạnh huyền  $AB$  thì  $A, B, M, N, C$  cùng thuộc mặt cầu đường kính  $AB$  (tâm  $I$  của mặt cầu là trung điểm cạnh huyền  $AB$ ).

Nếu  $M, N, C$  cùng nhìn cạnh  $AB$  dưới góc  $90^\circ$  thì  $A, B, M, N, C$  cùng thuộc mặt cầu đường kính  $AB$  (tâm  $I$  của mặt cầu là trung điểm cạnh huyền  $AB$ ).

**Bài 1.1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ .

a) Xác định tâm  $I$  mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  (xem hình 1a).

GV có thể sử dụng các câu hỏi gợi ý:

BC vuông góc với mặt phẳng nào? Tại sao?

$$(BC \perp (SAB) \Leftrightarrow BC \perp AB, BC \perp SA)$$

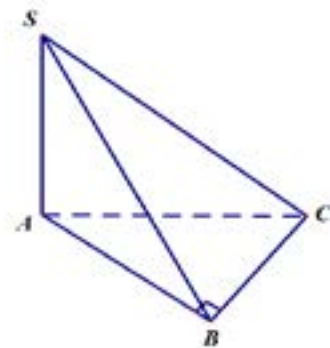
Từ  $SA \perp (ABC)$ , chúng ta có các mặt nào của hình chóp là tam giác vuông? Tại sao?

$A$  nhìn  $SC$  dưới góc vuông, liệu  $B$  có nhìn  $SC$  dưới góc vuông không? Em thử kiểm tra điều này.

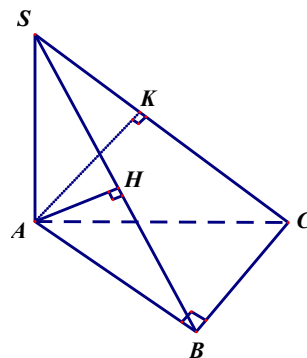
Từ đó suy ra hai tam giác vuông có chung cạnh huyền và tìm tâm  $I$  mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

Như vậy, trong bài 1.1a, điều quan trọng nhất HS cần phát hiện được là hai tam giác  $SAC, SBC$  là tam giác vuông có chung cạnh huyền  $SC$ .

b) Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB, SC$ . Tìm tâm của mặt cầu đi qua 5 điểm  $A, H, K, B, C$  (xem Hình 1b).



Hình 1a



Hình 1b

GV có thể sử dụng phân tích: tam giác  $AKC, ABC$  là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền  $AC$ . Dự đoán cần chứng minh  $AHC$  là tam giác vuông có cạnh huyền  $AC$  dẫn đến cần chứng minh  $AH$  vuông góc với  $HC$  tức là  $AH$  vuông góc với mp  $(ABC)$  (cách chứng minh tương tự như bài 1.1a). Từ đó, ta có 5 điểm  $A, H, K, B, C$  cùng thuộc mặt cầu đường kính  $AC$ .

Như vậy, trong bài 1.1b, điều quan trọng nhất HS cần phát hiện được là ba tam giác  $AKC, ABC, AHC$  là tam giác vuông có chung cạnh huyền  $AC$ .

#### Lưu ý:

1) Rèn cho HS kỹ năng quy lạ về quen. Có thể phát biểu câu hỏi khác trong bài 1.1b, chẳng hạn: chứng minh 5 điểm  $A, H, K, B, C$  cùng thuộc mặt cầu có tâm là trung điểm  $AC$ .

2) GV cần cho HS nhắc lại định nghĩa và phương pháp chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

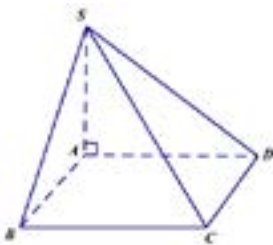
Từ bài toán 1.1, ta có bài toán 1.2 tương tự hoặc mở rộng

**Bài 1.2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Gọi  $H, K, L$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB, SC, SD$ .

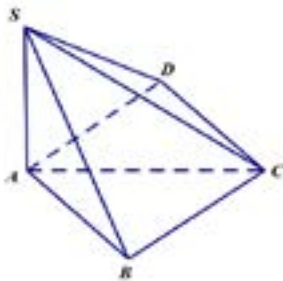
- a) Tìm tâm của mặt cầu đi qua 5 điểm  $S, A, B, C, D$ .
- b) Tìm tâm của mặt cầu đi qua 5 điểm  $A, H, K, B, C$ .
- c) Tìm tâm của mặt cầu đi qua 7 điểm  $A, B, C, D, H, K, L$ .

**Câu a**

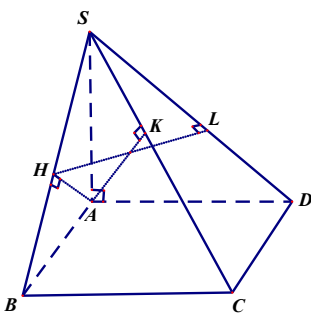
**Bình luận:**



Hình 2a



Hình 2b



Hình 2c

• Thông thường, HS vẽ hình như hình 2a. Có thể điều chỉnh hình 2a thành hình 2b.

• Ấn điểm  $D$  hình 2b bài toán 1.2a trở thành bài toán 1.1a.

• Thêm điểm  $D$  hình 2b, bài toán 1.2a có thể xem là bài toán tương tự của bài toán 1a hoặc phát triển từ bài toán 1.1a:  $\Delta SAC, \Delta SBC$  là các tam giác vuông có chung cạnh huyền  $SC$ . Dự đoán cần chứng minh  $\Delta SDC$  là tam giác vuông có cạnh huyền  $SC$ . Điều này HS tự bản thân rèn luyện được (tương tự bài 1.1a).

**Câu b:**

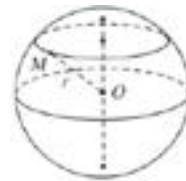
**Bình luận:** Ấn điểm  $D$  hình 2c bài toán 1.2b trở thành bài toán 1.1b.

**Câu c:**

**Bình luận:** Thêm điểm  $D$  hình 2c bài toán 1.2c có thể xem là bài toán tương tự của bài toán 1.2b hoặc phát triển từ bài toán 1.2b.

**Trường hợp 2. Vận dụng định nghĩa mặt cầu**

Tập hợp những điểm  $M$  trong không gian cách điểm  $O$  cố định một khoảng không đổi bằng  $r$  ( $r > 0$ ) được gọi là **mặt cầu** tâm  $O$  bán kính  $r$ . Kí hiệu  $S(O; r)$  và  $S(O; r) = \{M | OM = r\}$



Hình 3

**Vận dụng:** Nếu có điểm  $I$  thỏa  $IA=IB=IC=ID$  thì  $A, B, C, D$  cùng thuộc mặt cầu tâm  $I$ .

**Bài 2.1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có

$SA \perp (ABC)$ ,  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ . Xác định tâm  $I$  mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

**Phân tích**

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$

$S.ABC$

$\Uparrow$

$$IA = IB = IC = IS$$

$\Uparrow$

$$IA = IB = IC$$

$\Uparrow$

$I$  thuộc trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$

$\Uparrow$

$$IA = IS$$

$\Uparrow$

$I$  thuộc mặt trung trực (hoặc đường trung trực) cạnh  $SA$

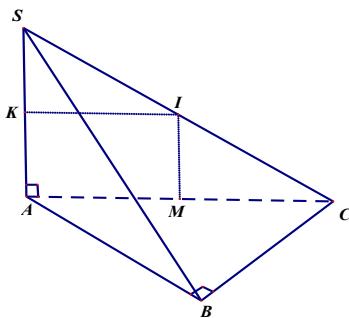
(trong bài toán này,  $I$  thuộc  $(d')$  đường trung trực cạnh  $SA$  và trục  $(d)$ , do  $(d')$  và  $(d)$  đồng phẳng)

**Lời giải tóm tắt**

Gọi  $M, K$  lần lượt là trung điểm  $AC$  và  $SA$ .

Với giả thiết bài toán, ta có:

- Trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là đường thẳng qua  $M$  song song với  $SA$
- Đường trung trực cạnh  $SA$  là đường thẳng qua  $K$  song song với  $AM$



Hình 4

$(d')$  và  $(d)$  đồng phẳng (cùng thuộc mp(SAC)) cắt nhau tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

**Lưu ý:**

- 1)  $I$  chính là trung điểm cạnh  $SC$ . Bài 2.1 đã được giải cách khác so với bài 1.1a.
- 2) GV cần cho HS nhắc lại định nghĩa trục đường tròn ngoại tiếp hình chóp, hướng dẫn HS phương pháp suy luận theo sơ đồ phân tích đi lên để tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Bài 2.2:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ . Xác định tâm  $I$  mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

**Phân tích**

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$

$S.ABC$

$\Uparrow$

$$IA = IB = IC = IS$$

$\Uparrow$

$$IA = IB = IC$$

$\Uparrow$

$I$  thuộc trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$

$\Uparrow$

$$IA = IS$$

$\Uparrow$

$I$  thuộc mặt trung trực (hoặc đường trung trực) cạnh  $SA$

(trong bài toán này,  $I$  thuộc  $(d')$  đường trung trực cạnh  $SA$  và trục  $(d)$ , do  $(d')$  và  $(d)$  đồng phẳng)

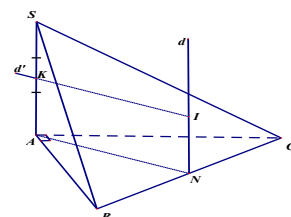
**Lời giải tóm tắt**

Gọi  $N, K$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $SA$ .

Với giả thiết bài toán, ta có:

- Trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là đường thẳng qua  $N$  song song với  $SA$
- Đường trung trực  $(d')$  cạnh  $SA$  là đường thẳng qua  $K$  song song với  $AN$
- $(d')$  và  $(d)$  đồng phẳng (cùng thuộc mp(SAN)) cắt nhau tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại

tiếp hình chóp  $S.ABC$ .



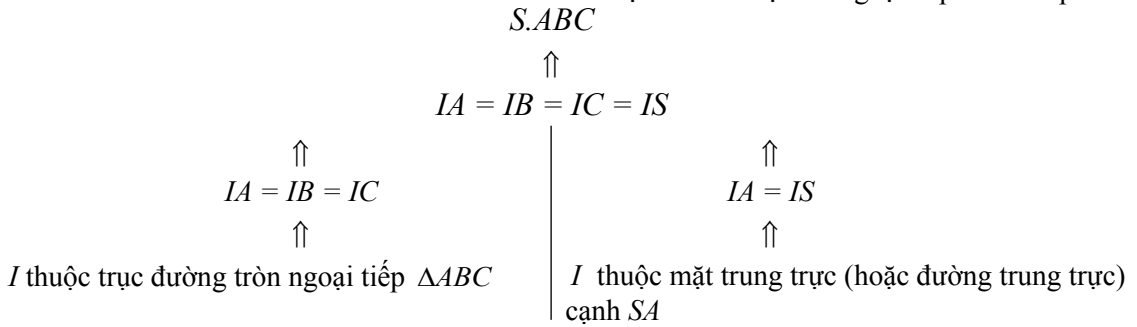
Hình 5

**Bài 2.3:** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$ .  
 Tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Phân tích**

Gọi  $O$  là tâm tam giác  $ABC$

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$

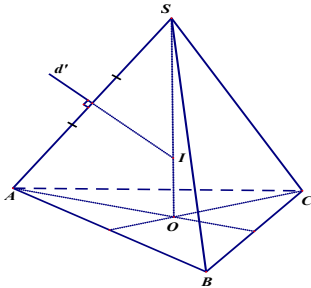


$I \in SO$  (trong bài toán này  $I$  thuộc  $(d')$  đường trung trực cạnh  $SA$  và  $(d)$ , do  $(d')$  và  $SO$  đồng phẳng)

**Lời giải tóm tắt**

Với giả thiết bài toán, ta có:

- Trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  là  $SO$
- Đường trung trực  $(d')$  cạnh  $SA$  và  $(d)$  đồng phẳng (cùng thuộc  $mp(SAO)$ ) cắt nhau tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .



Hình 6

**Lưu ý:** GV cần cho HS nhắc lại định nghĩa và tính chất của hình chóp tam giác đều.

**Bài 2.4:** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có góc giữa cạnh bên và mặt đáy là  $45^\circ$ . Tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Gọi  $O$  là tâm tam giác  $ABC$ .

**Cách 1:**

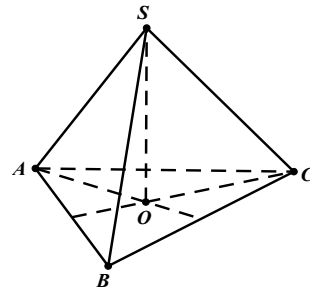
**Phân tích**

Từ việc xác định góc giữa các cạnh bên  $SA$  và mặt đáy có nhận xét gì về tam giác  $SAO$ . Từ đó chỉ ra tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Lời giải tóm tắt**

Với giả thiết bài toán, ta có:

- Tam giác  $SAO$  vuông cân tại  $O$  nên  $OA=SO$
- $OA=OB=OC$
- $O$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

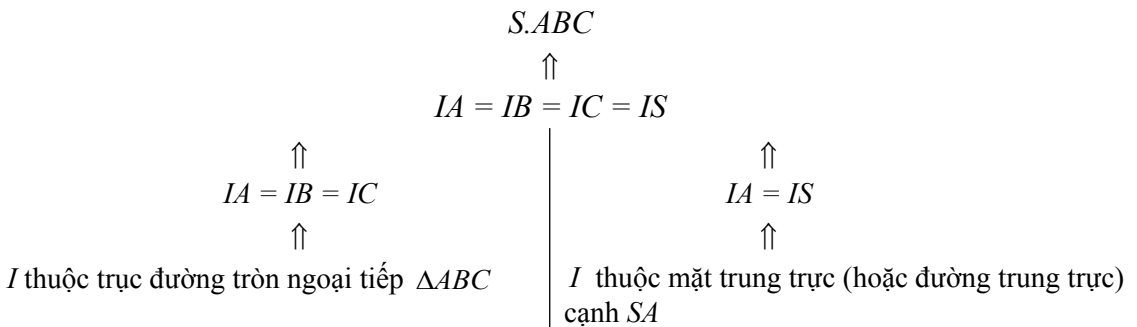


Hình 7

**Cách 2:**

**Phân tích**

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$



với giả thiết bài toán, có nhận xét gì về tam giác  $SAO$ . Từ đó chỉ ra vị trí điểm  $I$ .

**Lời giải tóm tắt**

Với giả thiết bài toán, ta có:

Trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là  $SO$

Đường trung trục  $(d')$  cạnh  $SA$  và  $(d)$  đồng phẳng (cùng thuộc  $mp(SAO)$ ) cắt nhau tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

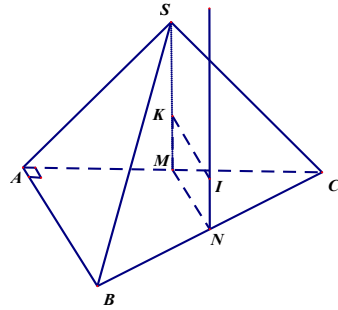
**Lưu ý:**

- Tam giác  $SAO$  vuông cân tại  $O$  nên  $I$  và  $O$  trùng nhau.
- GV cần cho HS nhắc lại định nghĩa và cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Từ bài toán 2.4, ta có bài toán 2.5 tương tự hoặc mở rộng

**Bài 2.5:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $45^\circ$ . Tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

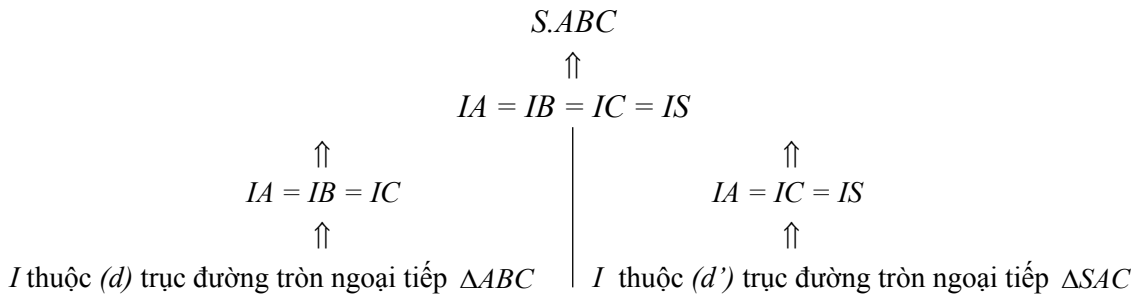
**Bài 2.6:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có mặt bên  $(SAC)$  là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy,  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$



Hình 8

**Phân tích**

$I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$



**Lời giải tóm tắt**

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AC$  và  $BC$ . Gọi  $K$  là tâm  $\Delta SAC$  với giả thiết bài toán, ta chứng minh được:  $SM \perp (ABC); MN \perp (SAC)$

Do đó:

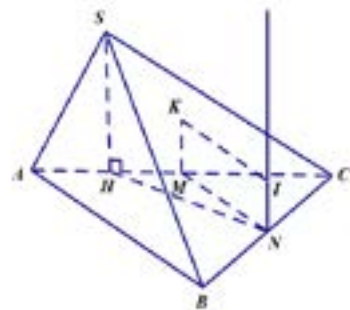
- Trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là đường thẳng qua  $N$  song song với  $SM$
- Trục  $(\Delta)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta SAC$  là đường thẳng qua  $K$  song song với  $MN$

$(\Delta)$  và  $(d)$  đồng phẳng (cùng thuộc  $mp(SMN)$ ), cắt nhau tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$

Bài toán tương tự bài 2.6, thay đổi giả thiết  $\Delta SAC$  là tam giác đều, ta có kết quả tương tự qua bài 2.7.

**Bài 2.7:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có mặt bên

$(SAC)$  nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy,  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .



Hình 9

**Phân tích**

$I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$

$S.ABC$

↑↑

$$IA = IB = IC = IS$$

↑↑

$$IA = IB = IC$$

↑↑

$I$  thuộc  $(d)$  trục đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$

↑↑

$$IA = IC = IS$$

↑↑

$I$  thuộc  $(d')$  trục đường tròn ngoại tiếp  $\Delta SAC$

**Lời giải tóm tắt**

Gọi  $SH$  là đường cao  $\Delta SAC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AC$  và  $BC$ . Gọi  $K$  là tâm  $\Delta SAC$ . Với giả thiết bài toán, ta chứng minh được:

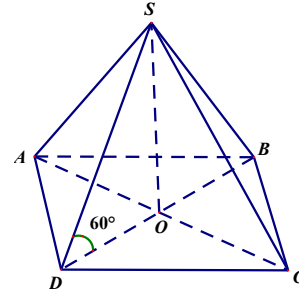
$$SH \perp (ABC); MN \perp (SAC), KM \perp (ABC)$$

- Trục  $(d)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là đường thẳng qua  $N$  song song với  $KM$

- Trục  $(\Delta)$  đường tròn ngoại tiếp  $\Delta SAC$  là đường thẳng qua  $K$  song song với  $MN$

- $(\Delta)$  và  $(d)$  đồng phẳng (cùng thuộc mp  $(KMN)$ , cắt nhau tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ )

**Bài 2.8:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$



Hình 10

**Phân tích**

- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$

$$\Rightarrow \overline{SAO} = \overline{SBO} = \overline{SCO} = \overline{SDO} = 60^\circ$$

$\Rightarrow$  Các tam giác  $SAC, SBD$  là các tam giác đều.

- Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$

$S.ABCD$

↑↑

$$IS = IA = IB = IC = ID$$

↑↑

$$IA = IB = IC = ID$$

↑↑

$$I \in SO$$

↑↑

$$IA = IC = IS$$

↑↑

$I$  thuộc trục đường tròn ngoại tiếp  $\Delta SAC$

↑↑

$I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta SAC$  (hay  $I$  là trọng tâm  $\Delta SAC$ )

**Lời giải tóm tắt**

- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$

$$\Rightarrow \overline{SAO} = \overline{SBO} = \overline{SCO} = \overline{SDO} = 60^\circ$$

$\Rightarrow$  Tam giác  $SAC, SBD$  là các tam giác đều.

- Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta SAC$  (hay  $I$  là trọng tâm  $\Delta SAC$ ).

Khi đó,  $IA=IS=IC; IA=IB=IC=ID$  do đó  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$

**2.4. Bài tập rèn luyện**

1) Cho hình chóp  $S.ABC$  có hai mặt bên  $(SAB)$  và  $(SAC)$  cùng vuông góc với đáy;  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB, SC$ .

Tim tâm của mặt cầu đi qua:

a)  $S, A, H, K$       ĐS: Trung điểm  $SA$

b)  $A, H, K, B, C$       ĐS: Trung điểm  $AC$

c)  $S, A, B, C$       ĐS: Trung điểm  $SC$

2) Cho hình chóp  $S.ABC$  có hai mặt bên ( $SAB$ ) và ( $SAC$ ) cùng vuông góc với đáy;  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB, SC$ . Tìm tâm của mặt cầu đi qua:

- a)  $S, A, H, K$       ĐS: Trung điểm  $SA$   
 b)  $A, K, B, C$       ĐS: Trung điểm  $BC$   
 c)  $S, A, B, C$       ĐS: Tương tự bài 2.2

3) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ , góc  $ASC$  bằng  $90^\circ$ . Chứng minh rằng  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

**Hướng dẫn:** Chứng minh  $OA=OB=OC=OD=OS$ .

4) Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc ( $ABC$ ); tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $SC$ . Chứng minh  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

5) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ;  $SA$  vuông góc ( $ABC$ ). Xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

6) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

**Hướng dẫn:** Chứng minh  $OA=OB=OC=OD=OS$ .

7) Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = a, SB = b, SC = c$  và ba cạnh  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc. Xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

8) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông đường chéo bằng  $a$ , hai mặt bên ( $SAB$ ) và ( $SAD$ ) cùng vuông góc với đáy và  $SA = a\sqrt{3}$ . Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

9) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$  cạnh  $a$ , tam giác  $SAB$  đều và mặt bên ( $SAB$ ) vuông góc với đáy. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

10) Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương.

11) Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên bằng  $2a$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

12) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $B$ ;  $AC = 2a$ ;  $BC = a$ ; góc giữa hai mặt phẳng ( $SBC$ ) và ( $ABC$ ) bằng  $60^\circ$ . Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABC$ .

13) Cho hình chóp đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$ , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

14) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ . Biết  $SB = 2a, SA$  vuông góc với ( $ABC$ ) và góc hợp bởi  $SB$  và mặt phẳng đáy bằng  $30^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SC$ . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $H.ABC$ .

15) Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a, I$  là trung điểm của  $AB, \Delta$  là đường thẳng qua  $I$  và vuông góc với mặt phẳng ( $ABCD$ ). Trên  $\Delta$  lấy một điểm  $S$  sao cho  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Xác định tâm và

tính bán kính của mặt cầu ( $S$ ) ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

16) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng ( $ABCD$ ),  $AB = a, AD = 2a, SC = a\sqrt{7}$ . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp  $S.ABCD$ . Tính thể tích khối cầu.

### 3. Kết luận

Giúp đỡ HS yếu môn Toán đòi hỏi GV phải hết sức kiên nhẫn. Đôi khi, GV hướng dẫn cho đối tượng này một bài toán có thể phải dạy lại các kiến thức cũ có liên quan. Trong dạy học, GV tập cho HS thói quen phân tích đề và cần nhấn mạnh các bài toán cơ bản (bài toán gốc) để HS nắm được bản chất của nó, khi giải toán có sự liên tưởng bài toán cần giải quyết có thể quy về bài toán gốc. Cùng một bài toán, GV nên có các cách hỏi khác nhau để rèn cho HS tư duy, quy lạ về quen. Ngoài ra, GV khuyến khích HS tìm các cách giải khác nhau cho một bài toán để rèn cho các em luôn có thói quen nhìn nhận một sự việc dưới nhiều góc độ khác nhau góp phần phát triển tư duy.

### Tài liệu tham khảo

Bộ Giáo dục và Đào tạo. 2014. *Sách giáo khoa Hình học 12*. NXB Giáo dục Việt Nam, HN.

Bộ Giáo dục và Đào tạo. 2014. *Sách bài tập Hình học 12*. NXB Giáo dục Việt Nam, HN.

Nguyễn, Bá Kim. 2007. *Phương pháp dạy học đại cương môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm. Hà Nội.