ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CHO HAI ÁNH XẠ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN *(B)* SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Common fixed-point theorems for two maps satisfying generalized condition *(B)* in metric space

Nguyễn Văn Dũng[1]
Nguyễn Thị Ánh Nguyệt[2]

Tóm tắt

Không gian mêtric là một khái niệm quan trọng trong Giải tích toán học và đã có nhiều sự mở rộng, trong đó không gian kiểu-mêtric là một sự mở rộng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Đặc biệt, lí thuyết điểm bất động trên không gian kiểu-mêtric phát triển rất mạnh trong thời gian gần đây. Trong bài báo này, trên cơ sở định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng trên không gian mêtric, chúng tôi thiết lập và chứng minh một số định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ thoả mãn điều kiện (B) suy rộng trên không gian kiểu-mêtric. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho những kết quả đạt được.

Từ khóa: điểm bất động chung, kiểu-mêtric, điều kiện (B) suy rộng.

Abstract

Metric space is an important concept in mathematical analysis that has been much more expanded and researched. Especially, fixed-point theory in metric space has been strongly developed recently. This paper is to clarify some common fixed-point theorems for two mappings satisfying the generalized condition (B) in metric space. In addition, it gives examples to illustrate the obtained results.

Keywords: common fixed-point theorem, metric space, generalized condition (B).

1. Mở đầu

Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric đầy đủ là một kết quả nổi bật của Giải tích toán học[3]. Việc mở rộng nguyên lí này là một trong những vấn đề thu hút được rất nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Các định lí điểm bất động đối với ánh xạ co được nghiên cứu cho nhiều kiểu ánh xạ, trên nhiều loại không gian khác nhau.

Năm 2010, Khamsi[4] đã giới thiệu khái niệm kiểu-mêtric như là một sự mở rộng của khái niệm mêtric. Một hướng nghiên cứu được một số tác giả trong lĩnh vực Lí thuyết điểm bất động quan tâm là thiết lập những định lí điểm bất động trong không gian kiểu-mêtric tương tự như những định lí điểm bất động đã có trong không gian mêtric và tìm những áp dụng của nó. Một số tính chất cơ bản của một số không gian kiểu-mêtric đã được chứng minh và một số định lí điểm bất động trên những không gian này đã được thiết lập[5] [6] [7].

Năm 2011, Abbas và cộng sự[8] đã chứng minh sự tồn tại của điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(B)* suy rộng trong không gian mêtric.

Bằng cách tương tự, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(B)* suy rộng trong không gian kiểu-mêtric; đồng thời, xây dựng ví dụ minh hoạ cho những kết quả đạt được.

2. Nội dung

2.1. Kiến thức chuẩn bị

Chúng ta cần đến các kiến thức chuẩn bị sau[4, 8].

2.1.1. Định nghĩa

Cho $K \geq 1$ khác rỗng, $K \geq 1$ là một số thực và $D: X \times X \to [\,0, +\infty)$ là một hàm thoả mãn các

[1] *Tiến sĩ, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp*

[2] *Cử nhân, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp*

[3] Agarwal, R. P., Meehan, M. & O'Regan, D. 2004. *Fixed point theory and applications.* Cambridge University Press: Cambridge.

[4] Khamsi, M. A. 2010. "Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". *Fixed Point Theory and Applications,* vol. 2010, pp. 1-7.

[5] Dung, N. V., Ly, N. T. T., Thinh, V. D. & Hieu, N. T. 2013. "Suzuki-type fixed point theorems for two maps in metric-type spaces". *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization,* vol. 4, no. 2, pp. 17-29.

[6] Hussain, N., Doric, D., Kadelburg, Z. & Radenovic, S. "Suzuki-type xed point results in metric type spaces". Fixed Point Theory and Applications, vol. 2012, no. 126, pp. 1-10.

[7] Jovanovic, M., Kadelburg, Z. & Radenovic, S. 2010. "Common xed point results in metric-type spaces". *Fixed Point Theory and Applications,* vol. 2010, pp. 1-15.

[8] Abbas, M., Babu, G. V. R. & Alemayehu, G. N. 2011. "On common fixed points of weakly compatible mapping satisfyings generalized condition (B)", Filomat, vol. 25, no. 2, pp. 9-19.

điều kiện sau:

(1) Với mọi $x, y \in X$, $D(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y$.

(2) $D(x,y)=D(y,x)$ với mọi $x, y \in X$.

(3) $D(x,z) \le K[D(x,y_1)+D(y_1,y_2)+...+D(y_n,z)]$ với mọi $x, y_1, y_2, ..., y_n, z \in X$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* (metric-type) trên X và (X,D,K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric* (metric-type space).

2.1.2. Nhận xét

(X,d) là một không gian mêtric khi và chỉ khi $(X,d,1)$ là một không gian kiểu-mêtric.

2.1.3. Định nghĩa

Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó:

(1) $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x)=0$.

(2) $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n,x_m)=0$.

(3) Không gian (X,D,K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy trong (X,D,K) là một dãy hội tụ.

Cho $f, T : X \to X$ là hai ánh xạ.

(1) Điểm x được gọi là *điểm trùng* (coincidence point) của f và T nếu $fx=Tx$.

(2) Khi đó cặp (f,T) được gọi là *tương thích yếu* (weakly compatible) nếu f và T giao hoán tại các điểm trùng của chúng, nghĩa là, nếu với mọi $x \in X$, $fx=Tx$ thì $fTx=Tfx$.

(3) Giá trị y được gọi là *giá trị trùng* (point of coincidence) của f và T nếu tồn tại $x \in X$ sao cho $y=fx=Tx$.

(4) Điểm x được gọi là điểm *bất động chung* (common fixed point) của f và T nếu $fx=Tx=x$.

2.2. Các kết quả chính

2.2.1. Định nghĩa

Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric. Ánh xạ $T: X \to X$ được gọi là thoả mãn *điều kiện* (B) nếu tồn tại $\delta \in (0,\frac{1}{K})$ và $L \ge 0$ sao cho

$$D(Tx,Ty) \le \delta D(x,y) + L\min\{D(x,Tx), D(y,Ty), D(x,Ty), D(y,Tx)\}$$

với mọi $x, y \in X$.

Bổ đề sau đã được trình bày[8] nhưng không chứng minh. Chúng tôi trình bày chi tiết chứng minh ở đây.

2.2.2 Bổ đề

Cho X khác rỗng và $f, T: X \to X$ có một giá trị trùng duy nhất trên X. Khi đó nếu cặp (f,T) là tương thích yếu thì f và T có điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. Vì $f, T : X \to X$ có một giá trị trùng duy nhất trên X nên tồn tại duy nhất $y \in X$ sao cho với mọi $x \in X$, nếu $Tx=fx$ thì

$Tx=fx=y$.

Do cặp (f,T) là tương thích yếu nên $fy=fTx=Tfx=Ty$. Suy ra $fy=Ty$ là một giá trị trùng của cặp (f,T). Vì giá trị trùng là duy nhất nên $fy=Ty=y$. Vậy y là điểm bất động chung của cặp (f,T).

Giả sử cặp (f,T) có hai điểm bất động chung trên X là x và y. Khi đó $fx=Tx=x$ và $fy=Ty=y$. Vậy x và y là hai giá trị trùng của cặp (f,T). Vì giá trị trùng là duy nhất nên $x=y$. Suy ra cặp (f,T) có duy nhất một điểm bất động chung trên X.

Tương tự như đối với không gian mêtric[8], chúng tôi giới thiệu khái niệm T-dãy và điều kiện *(B)* suy rộng trong không gian kiểu-mêtric như sau.

2.2.3 Định nghĩa

Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric, $f, T: X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn $T(X) \subset f(X)$ và $x_0 \in X$. Chọn $x_1 \in X$ sao cho $fx_1 = Tx_0$. Tiếp tục quá trình này, ta chọn $x_{k+1} \in X$ sao cho $fx_{k+1} = Tx_k$, k = 0,1,2,... Khi đó dãy $\{fx_n\}$ được gọi là một *T - dãy* (T-sequence) với điểm bắt đầu x_0.

2.2.4. Định nghĩa

Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric. Ánh xạ $T: X \to X$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện (B) suy rộng liên kết với ánh xạ* $f: X \to X$ (1.1) nếu tồn tại $\delta \in (0,\frac{1}{K})$ và $L \ge 0$ sao cho

$$D(Tx,Ty) \le \delta M(x,y) + L\min\{D(fx,Tx), D(fy,Ty), D(fx,Ty), D(fy,Tx)\}$$

với mọi $x, y \in X$, ở đây

$$M(x,y)=\max\left\{D(fx,fy),D(fx,Tx),D(fy,Ty),\frac{D(fx,Ty)+D(fy,Tx)}{2}\right\}$$

Khi *f* là ánh xạ đồng nhất thì điều kiện *(B)* suy rộng liên kết với ánh xạ *f* được gọi là *điều kiện (B) suy rộng*. Rõ ràng, mỗi ánh xạ *T* thỏa mãn điều kiện *(B)* là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(B)* suy rộng. Ví dụ sau chứng tỏ chiều ngược lại không xảy ra.

2.2.5. Ví dụ

Cho $X=\{0,\frac{1}{2},1\}$ và

$$D(0,0)=D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=D(1,1)=0,$$

$$D\left(0,\frac{1}{2}\right)=D\left(\frac{1}{2},0\right)=D\left(\frac{1}{2},1\right)=D\left(1,\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$D(0,1)=D(1,0)=3.$$

Khi đó, *D* là một kiểu-mêtric trên *X* với $K=\frac{3}{2}$ Đặt

$$T:X\to X \text{ với } Tx=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{khi } x\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}\\ 0 & \text{khi } x=1.\end{cases}$$

Khi đó *T* thỏa mãn điều kiện *(B)* suy rộng với $\delta=\frac{1}{3}$ và $L=0$. Tuy nhiên *T* không thỏa mãn điều kiện *(B)* ở trường hợp $x=\frac{1}{2}$ và $y=1$.

2.2.6. Định lí

Cho (X,D,K) là một không gian kiểu-mêtric và *f*,*T* : *X*® *X* là hai ánh xạ thỏa mãn

(1) *D* là hàm liên tục.

(2) $T(X)\subset f(X)$.

(3) *T* thoả mãn điều kiện *(B)* suy rộng liên kết với ánh xạ *f*.

(4) $f(X)$ hoặc $T(X)$ là một không gian con đầy đủ của *X*.

Khi đó *f* và *T* tồn tại điểm trùng và giá trị trùng là duy nhất.

Chứng minh. Với $x_0\in X$, xét $\{fx_n\}$ là một *T*-dãy với điểm bắt đầu là x_0. Ta có

$$D(Tx_n,Tx_{n-1})\le\delta M(x_n,x_{n-1})+L\min\{D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_{n-1},fx_n)D(fx_n,fx_n),D(fx_{n-1},fx_{n+1})\}$$

hay

$$D(Tx_n,Tx_{n-1})\le\delta M(x_n,x_{n-1})\qquad(1.2)$$

ở đây

$$M(x_n,x_{n-1})=$$

$$\max\left\{D(fx_n,fx_{n-1}),D(fx_n,Tx_n),D(fx_{n-1},Tx_{n-1}),\frac{D(fx_n,Tx_{n-1})+D(fx_{n-1},Tx_n)}{2}\right\}$$

$$=\max\left\{D(fx_n,fx_{n-1}),D(fx_n,fx_{n+1}),D(fx_{n-1},fx_n),\frac{D(fx_n,fx_n)+D(fx_{n-1},fx_{n+1})}{2}\right\}$$

$$=\max\left\{D(fx_n,fx_{n-1}),D(fx_n,fx_{n+1}),\frac{D(fx_{n-1},fx_{n+1})}{2}\right\}.$$

Trường hợp 1. Tồn tại n sao cho

$$M(x_n,x_{n-1})=D(fx_n,fx_{n-1}).$$

Từ (1.2) ta suy ra

$$D(fx_{n+1},fx_n)\le\delta D(fx_n,fx_{n-1}).$$

Trường hợp 2. Tồn tại *n* sao cho $M(x_n,x_{n-1})=D(fx_n,fx_{n+1})$. Từ (1.2) ta suy ra $D(fx_{n+1},fx_n)\le\delta D(fx_n,fx_{n+1})$. Vì $\delta\in(0,\frac{1}{K})$ nên $D(fx_{n+1},fx_n)=0$. Do đó

$$D(fx_{n+1},fx_n)\le\delta D(fx_n,fx_{n-1}).$$

Trường hợp 3. Với mọi *n* ta có

$$M(x_n,x_{n-1})=\frac{D(fx_{n-1},fx_{n+1})}{2}.$$

Từ (1.2) ta suy ra

$$D(fx_{n+1},fx_n)\le\frac{\delta D(fx_{n-1},fx_{n+1})}{2}\le\frac{\delta K\big(D(fx_{n+1},fx_n)+D(fx_n,fx_{n-1})\big)}{2}.$$

Vậy

$$D(fx_{n+1},fx_n)\le\frac{\delta K}{2-\delta K}D(fx_n,fx_{n-1})\le\delta KD(fx_n,fx_{n-1}).$$

Từ ba trường hợp trên, với mọi n ta có

$$D(fx_{n+1},fx_n)\le\delta KD(fx_n,fx_{n-1}).$$

Từ đó suy ra

$$D(fx_{n+1},fx_n)\le\delta KD(fx_n,fx_{n-1})\le\ldots\le(\delta K)^nD(fx_0,fx_1).$$

Với mọi *m* > *n*, ta có $D(fx_m,fx_n)$

$$\le K\big(D(fx_n,f_{n+1})+D(fx_{n+1},fx_{n+2})+\ldots+D(fx_{m-1},fx_m)\big)$$

$$\le K\big((\delta K)^nD(fx_0,fx_1)+(\delta K)^{n+1}D(fx_0,fx_1)+\ldots+(\delta K)^{m-1}D(fx_0,fx_1)\big)$$

$$=K\big(((\delta K)^n+(\delta K)^{n+1}+\ldots+(\delta K)^{m-1})D(fx_0,fx_1)\big)$$

$$\le K\frac{(\delta K)^n}{1-\delta K}D(fx_0,fx_1).$$

Cho $n, m \to \infty$ ta có $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(fx_m, fx_n) = 0.$

Vậy $\{fx_n\}$ là một dãy Cauchy.

Nếu $f(X)$ là một không gian con đầy đủ của X thì tồn tại $p \in f(X)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} D(fx_n, p) = 0$

Khi đó tồn tại $u^* \in X$ sao cho $fu^* = p$. Ta có

$$D(p, Tu^*)$$

$$\le K(D(p, fx_{n+1}) + D(fx_{n+1}, Tu^*) = KD(p, fx_{n+1}) + KD(Tx_n, Tu^*)$$

$$\le KD(p, fx_{n+1}) + \delta K \max\left\{D(fx_n, fu^*), D(fx_n, Tx_n), D(fu^*, Tu^*), \frac{D(fx_n, Tu^*) + D(fu^*, Tx_n)}{2}\right\}$$

$$+ KL \min\left\{D(fx_n, Tx_n), D(fu^*, Tu^*), D(fx_n, Tu^*), D(fu^*, Tx_n)\right\}.$$

Cho $n \to \infty$ và sử dụng tính liên tục của D, ta có

$$D(p, Tu^*) \le K0 + \delta K \max\left\{0, 0, D(p, Tu^*), \frac{D(p, Tu^*) + 0}{2}\right\} + KL \min\{0, D(p, Tu^*), D(p, Tu^*), 0\}.$$

Từ đó ta suy ra $D(p, Tu^*) \le K\delta D(p, Tu^*)$.

Vì $Tu^* = p = fu^*$. nên $Tu^* = p = fu^*$. hay $Tu^* = p = fu^*$.

Nếu *T(X)* là một không gian đầy đủ thì tồn tại $q \in T(X)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} D(Tx_n, q) = 0$.

Vì $T(X) \subset f(X)$ nên $q \in f(X)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} D(fx_n, q) = 0$. Chứng minh tương tự như trên ta có $u^* \in X$ sao cho $Tu^* = q = fu^*$.

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất của giá trị trùng. Giả sử rằng tồn tại $p, p^* \in X$ sao cho $fu = Tu = p, fu^* = Tu^* = p^*$. Khi đó

$$= \quad D(Tu, Tu^*)$$

$$+ L \min\left\{D(fu, Tu^*), D(fu, Tu), D(fu^*, Tu^*), D(fu^*, Tu)\right\}$$

$$d\max\left\{D(p, p^*), D(p, p), D(p^*, p^*), \frac{D(p, p^*) + D(p^*, p)}{2}\right\}$$

$$+ L \min\left\{D(p, p^*), D(p, p), D(p^*, p^*), D(p^*, p)\right\}$$

$$= dD(p, p^*).$$

Suy ra $D(p, p^*) \le \delta D(p, p^*)$. Vì $\delta \in (0, \frac{1}{K})$ nên $D(p, p^*) = 0$ hay $p = p^*$.

2.2.7. Hệ quả

Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ, D là một hàm liên tục và $T : X \to X$ thoả mãn điều kiện *(B)*. Khi đó T có điểm bất động duy nhất.

Chứng minh. Áp dụng Định lí 2.2.6 với *f* là ánh xạ đồng nhất ta có điều phải chứng minh.

2.2.8. Định lí

Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $f, T : X \to X$ thỏa mãn

(1) D là một hàm liên tục.

(2) *T* thỏa mãn điều kiện *(B)* suy rộng liên kết với ánh xạ *f*.

(3) *f*(X) hoặc *T(X)* là một không gian con đầy đủ của *X*.

(4) $T(X) \subset f(X)$.

(5) Cặp (f, T) tương thích yếu.

Khi đó cặp (f, T) có điểm bất động chung duy nhất trên X.

Chứng minh. Từ Định lí 2.2.6 ta có f và *T* có giá trị điểm trùng duy nhất và (f, T) tương thích yếu. Khi đó, theo Bổ đề 2.2.2 ta suy ra được điều phải chứng minh.

2.2.9. Hệ quả

Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $T(X) \subset f(X)$ sao cho $T(X) \subset f(X)$. Hơn nữa, tồn tại $\delta \in (0,1)$ và $L \ge 0$ sao cho

$$D(Tx, Ty) \le \delta m(x, y) + L \min\{D(f(x), T), D(fy, Ty), D(fx, Ty), D(fy, Tx)\} \quad (1.3)$$

với mọi $x, y \in X$, ở đây

$$m(x, y) = \max\left\{D(fx, fy), \frac{D(fx, Tx) + D(fy, Ty)}{2}, \frac{D(fy, Tx) + D(fx, Ty)}{2}\right\}.$$

Nếu *f(X)* hoặc *T(X)* là một không gian con đầy đủ của X thì cặp (f, T) có một giá trị trùng. Hơn nữa nếu cặp (f, T) là tương thích yếu thì nó có một điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh. Bất đẳng thức (1.3) là dạng đặc biệt của bất đẳng thức (1.1) nên kết quả được suy trực tiếp từ Định lí 2.2.8.

Cuối cùng, chúng tôi trình bày ví dụ minh hoạ cho kết quả ở trên.

2.2.10. Ví dụ

Cho $X = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ và

$$D(0,0) = D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = D(1,1) = D(2,2) = 0,$$

$$D\left(1,\frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2},1\right) = D(0,1) = D(1,0) = D(0,2) = D(2,0) = 3$$

$$D\left(\frac{1}{2},0\right) = D\left(0,\frac{1}{2}\right) = D\left(2,\frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2},2\right) = D(1,2) = D(2,1) = 1$$

Khi đó (X,D) là một không gian kiểu-mêtric với $K = \frac{3}{2}$. Đặt

$$T : X \to X \text{ với } Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}, \\ 0, x \in \{1,2\} \end{cases}$$

$$f : X \to X \text{ với } fx = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2} \\ 2, x = 1 \\ 1, x = 2. \end{cases}$$

Khi đó $T(X) \subset f(X)$ và cặp (f,T) là tương thích yếu trên *X*. Hơn nữa T thỏa mãn điều kiện (B) suy rộng với $\delta = \frac{1}{3}$ và $L = 0$.

Mặt khác *f* và *T* thỏa mãn các giả thiết còn lại của Định lí 2.2.8. Vậy Định lí 2.2.8 áp dụng được cho f và T trên (X,D). Vì (X,D) không là một không gian mêtric nên ta không thể áp dụng các kết quả đã có[8] cho f và T trên (X,D).

3. Kết luận

Bài viết đã đạt được những kết quả sau:

- Giới thiệu điều kiện *(B)* và điều kiện *(B)* suy rộng trong không gian kiểu-mêtric: Định nghĩa 2.2.1, Định nghĩa 2.2.4.

- Thiết lập và chứng minh được định lí điểm bất động chung cho hai ánh xạ thoả mãn điều kiện *(B)* suy rộng trong không gian kiểu-mêtric trong Định lí 2.2.6, Hệ quả 2.2.7, Định lí 2.2.8, Hệ quả 2.2.9.

- Xây dựng được ví dụ minh họa ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(B)* suy rộng nhưng không thỏa mãn điều kiện *(B)* và ví dụ minh hoạ cho Định lí 2.2.8 trong Ví dụ 2.2.5, Ví dụ 2.2.10.

Tài liệu tham khảo

Abbas, M., Babu, G. V. R. & Alemayehu, G. N. 2011. "On common fixed points of weakly compatible mapping satisfyings generalized condition (B)", *Filomat,* vol. 25, no. 2, pp. 9-19.

Agarwal, R. P., Meehan, M. & O'Regan, D. 2004. *Fixed point theory and applications*. Cambridge University Press: Cambridge.

Dung, N. V., Ly, N. T. T., Thinh, V. D. & Hieu, N. T. 2013. "Suzuki-type fixed point theorems for two maps in metric-type spaces". *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization,* vol. 4, no. 2, pp. 17-29.

Khamsi, M. A. 2010. "Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2010, pp. 1-7.

Hussain, N., Doric, D., Kadelburg, Z. & Radenovic, S. "Suzuki-type xed point results in metric type spaces". *Fixed Point Theory and Applications,* vol. 2012, no. 126, pp. 1-10.

Jovanovic, M., Kadelburg, Z. & Radenovic, S. 2010. "Common xed point results in metric-type spaces". *Fixed Point Theory and Applications,* vol. 2010, pp. 1-15.