LỰA CHỌN ĐỐI TƯỢNG TỐI ƯU BẰNG MÔ HÌNH XÍCH MARKOV

Võ Duy Minh[1]

Tóm tắt – *Trong bài toán lựa chọn tối ưu, nhiều đối tượng giống nhau về hình thức nhưng khác nhau về chất lượng và ta có thể chỉ ra đối tượng nào tốt hơn trong chúng. Vấn đề đặt ra là làm thế nào để chọn được đối tượng tốt nhất trong số nhiều đối tượng ấy và tuân thủ những điều kiện ràng buộc: ta chỉ xem xét từng đối tượng được chọn ngẫu nhiên và đưa ra quyết định xem đối tượng đang xét có phải là đối tượng tốt nhất hay không. Bài viết này mô tả bài toán chọn lựa tối ưu cùng với một số tính chất của nó, đồng thời trình bày việc tìm được một quyết định lựa chọn đối tượng tối ưu.*

Từ khóa: Mô hình xích markov, sự lựa chọn đối tượng tối ưu, bài toán lựa chọn tối ưu.

Abstract – *In the optimal choice problem, many objects are similar in form but different in quality and we can show which object is better among them. The question is how to choose the best among many objects that comply with the binding conditions: we only consider each object to be selected randomly and then make decision whether this object is the best. This article describes the optimal choice problem along with some of its properties and presents the finding of decision that helps make optimal object selection.*

Keywords: Markov chain model, optimal object selection, the optimal choice problem.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay, lý thuyết xác suất & thống kê có nhiều ứng dụng trong kinh tế như toán tài chính, lý thuyết trò chơi, lý thuyết quyết định,... và đặc biệt là chọn lựa phương án tối ưu theo mục đích người chọn [1]. Bài viết này trình bày bài toán chọn lựa tối ưu trong nhiều đối tượng với những điều kiện ràng buộc dựa trên mô hình xích Markov.

Xét một tập hợp gồm s đối tượng giống nhau về hình thức nhưng khác nhau về chất lượng, sao cho luôn luôn có thể chỉ ra được đối tượng tốt hơn trong bất kỳ cặp đối tượng được xét. Một người quan sát muốn chọn được đối tượng tối ưu trong s đối tượng đã cho nhưng phải tuân thủ một số điều kiện lần lượt được nêu ra sau đây. Người quan sát chỉ được lần lượt chọn ngẫu nhiên từng đối tượng và khảo sát; sau khi khảo sát đối tượng ấy, anh ta phải đi đến quyết định hoặc là chấp nhận đối tượng đó hay không chấp nhận nó. Nếu anh ta chấp nhận đối tượng đang được xem xét nghĩa là đối tượng đó được cho là tốt nhất trong k đối tượng ban đầu thì anh ta không xem xét các đối tượng còn lại. Ngược lại, nếu người quan sát không chấp nhận đối tượng ấy (và không thể chọn lại nó) thì anh ta tiếp tục chọn và khảo sát các đối tượng tiếp theo còn lại (dĩ nhiên, người quan sát có thể có quyết định sai lầm bởi không chấp nhận đối tượng tốt nhất để hy vọng chọn được đối tượng tốt hơn, nhưng không có). Bên cạnh đó, người quan sát phải chấp nhận một quy tắc một cách tự nhiên về việc chọn đối tượng tối ưu như sau: "Không bao giờ chấp nhận một đối tượng không tốt hơn những đối tượng đã bị loại bỏ trước đó". Khi đó, người quan sát có thể chọn đối tượng đầu tiên và dừng lại việc tìm kiếm những đối tượng tốt hơn, hoặc anh ta không chấp nhận đối tượng đầu tiên và xem xét các đối tượng tiếp theo mỗi lần một đối tượng cho đến khi tìm được một đối tượng tốt hơn các đối tượng đã được xem xét trước đó. Anh ta có thể chấp nhận đối tượng này và do đó dừng lại quá trình tìm kiếm của mình, hoặc anh ta có thể khảo sát các đối tượng tiếp theo với hy vọng là tìm được một đối tượng thật sự tốt hơn nữa, và cứ tiếp tục như thế.

II. NỘI DUNG

A. Trạng thái của các đối tượng

Gọi ϵ_k(k=1,2,...s) là các trạng thái tối ưu thứ k trong số k đối tượng đầu tiên đã và đang xem xét, và gọi ϵ_{k+1} là trạng thái tối ưu thứ s+1 trong

[1]Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Tiền Giang

Ngày nhận bài: 05/01/2016, ngày nhận kết quả bình duyệt: 26/9/2016, ngày chấp nhận đăng: 20/12/2016

số s đối tượng ban đầu đã bị loại bỏ. Như đã mô tả ở trên, người quan sát chọn ngẫu nhiên từng đối tượng một để quan sát và quyết định, cho nên có những thời điểm mà đối tượng xem xét cuối cùng tốt hơn tất cả các đối tượng đã khảo sát trước đó. Ký hiệu những thời điểm đó theo thứ tự xuất hiện lần lượt bởi t=0,1,...v với t=0 thời điểm tương ứng với xem xét đối tượng đầu tiên và t=v là thời điểm xem xét đối tượng tối ưu trong s đối tượng (v=0 nếu đối tượng tốt nhất được xem xét đầu tiên). Khi đó, ta có thể xem hệ thống với các trạng thái $\epsilon_1,...\epsilon_s$, ϵ_{s+1}, và ξ(t) là trạng thái của hệ thống tại thời điểm t với $\xi(0) = \epsilon_1$ và $\xi(n) = \epsilon_{s+1}$ với n>v . Vậy quá trình ngẫu nhiên $\xi(0) \to \xi(1) \to \xi(2) \to ...$ là một xích Markov [2], bởi vì chúng ta có thể thấy được

$$P\{\xi(t+1) = \epsilon_j|\xi(0) = \epsilon_1, ..., \xi(t) = \epsilon_i\}$$

$$= P\{\xi(t+1) = \epsilon_j|\xi(t) = \epsilon_i\}$$

B. Xác suất chuyển trạng thái của xích Markov

Bây giờ, chúng ta sẽ tính các xác suất chuyển của xích Markov này. Rõ ràng

$$P_{s+1,s+1} = P\{\xi(n+1) = \epsilon_{s+1}|\xi(n) = \epsilon_{s+1}\} = 1,$$

$$p_{ij} = P\{\xi(n+1) = \epsilon|\xi(n) = \epsilon_i\} = 0$$

nếu i $\leq$ j và j $\leq$ s . Với i < j $\leq$ s, ta có

$$p_{ij} = P\{\xi(n+1) = \epsilon|\xi(n) = \epsilon_i\} = 0$$

$$= P\{\xi(2) = \epsilon|\xi(1) = \epsilon_i\} = \frac{P\{\xi(2) = \epsilon_j, \xi(1) = \epsilon_i\}}{P\{\xi(1) = \epsilon_i\}}$$

Ta thấy: P{ξ(1)=ϵ_i} là xác suất của việc chọn ngẫu nhiên lần lượt i đối tượng từ tập hợp ban đầu sao cho đối tượng tối ưu trong số đối tượng được chọn đúng vào lần chọn thứ i. Do việc chọn ngẫu nhiên ta thấy có i! cách sắp xếp thứ tự i đối tượng (hoán vị i đối tượng được chọn) và với đối tượng tốt nhất trong số i đối tượng được chọn ở lần chọn thứ i thì có (i-1)! khả năng xảy ra nên

$$P\{\xi(1) = \epsilon_i\} = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}.$$

Bên cạnh đó, ta có P{ξ(2)=ϵ_j, ξ(1)=ϵ_i} là xác suất của việc chọn ngẫu nhiên lần lượt j đối tượng (có j! cách sắp xếp theo thứ tự của j đối tượng đó) sao cho đối tượng tốt nhất trong số j đối tượng được chọn ở lần chọn thứ j và đối tượng tốt thứ nhì ở lần chọn i (có (j-2)! cách sắp xếp theo thứ tự của j đối tượng theo yêu cầu đó). Vậy, ta tính được xác suất

$$P\{\xi(2) = \epsilon_j, \xi(1) = \epsilon_i\} = \frac{(j-2)!}{j!} = \frac{1}{(j-1)j}$$

Do đó, ta được kết quả

$$p_{ij} = \frac{1/(j-1)j}{(1/j)} = \frac{i}{(j-1)j}$$

với i < j $\leq$ s . Cuối cùng ta tính

$$P_{i,s+1} = P\{\xi(n+1) = \epsilon_{s+1}|\xi(n) = \epsilon_i\}$$

$$= P\{\xi(2) = \epsilon_{s+1}|\xi(1) = \epsilon_i\}$$

$$= \frac{P\{\xi(2) = \epsilon_{s+1}, \xi(1) = \epsilon_i}{P\xi(1) = \epsilon_i} = \frac{(s-1)!/s!}{1/i} = \frac{i}{s}$$

bởi vì $P\{\xi(2) = \epsilon_{s+1}, \xi(1) = \epsilon_i$ (người quan sát đã khảo sát hết s đối tượng nhưng không chọn được đối tượng tốt nhất) được xem là xác suất của việc hoán vị s đối tượng (s! cách như thế) sao cho đối tượng tốt nhất ở vị trí thứ i ((s-1)! cách như thế) tương ứng với lần chọn thứ i. (Hoàn toàn tương tự cách tính trên, $\frac{i}{s}$ chính là xác suất đối tượng thứ i là tốt nhất trong s đối tượng ban đầu nếu biết hệ thống đang ở trạng thái ϵ_i). Tóm lại, ta có xác suất chuyển

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & khi \quad i \geq j, j \leq s \\ 1 & khi \quad i = j = s+1 \\ i/(j-1)j & khi \quad i < j \leq s \\ i/s & khi \quad i < j = s+1 \end{cases}$$

C. Xác suất chọn được đối tượng tối ưu

Trở lại với người quan sát, anh ta có một quy tắc quyết định d=d(x) với x=$\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_s$ đã được quy định trước cho mỗi trạng thái $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_s$ để xác định xem quá trình khảo sát các đối tượng được tiếp tục hay dừng lại. Quy tắc quyết định d chỉ nhận hai giá trị 0 ứng với dừng lại việc khảo sát và ứng với tiếp tục việc khảo sát. Mục tiêu của người quan sát là tìm quy tắc quyết định d^0 để cho xác suất chọn được đối tượng tốt nhất là lớn nhất. Xác suất để chọn được đối tượng tốt nhất được tính bởi

$$P = \sum_i \frac{i}{s} p_i$$

Trong đó, $\frac{i}{s}$ là xác suất mà đối tượng khảo sát thứ là đối tượng tốt nhất trong s đối tượng ban đầu khi trạng thái của hệ thống là ϵ_i, p_i là xác suất quá trình dừng lại khi hệ thống ở trạng thái ϵ_i, và tổng trên được lấy với tất cả số hạng ứng với các trạng thái ϵ_i mà qui tắc quyết định d=d(x) làm cho quá trình dừng lại. Như vậy, chúng ta tìm quy tắc quyết định tối ưu $d^0 = d^0(x)$ để cho $P = \sum_i \frac{i}{s} p_i$ là lớn nhất [3].

D. Quy tắc chọn đối tượng tối ưu

Xét p(k,d) là xác suất chọn được đối tượng tốt nhất khi trạng thái của hệ thống là ϵ_k và quy tắc quyết định d được sử dụng. Theo công thức xác suất toàn phần [4], ta có

$$p(k,d)=\sum_{j=k+1}^{s}P_{kj}(d)P(j,d)$$

trong đó, P_{kjj}(d) là xác suất chuyển của hệ thống khi người quan sát áp dụng quy tắc quyết định d. Rõ ràng nếu quá trình đang ở trạng thái ϵ_s thì đối tượng thứ s là tốt nhất trong số s đối tượng đầu tiên được chọn và do đó nó tự thân là đối tượng tốt nhất cần tìm. Vậy, giá trị của quyết định tối ưu khi x=ϵ_s phải là $d^0(\epsilon_s)$=0 và $P(s.d^0)$=1. Với quy tắc quyết định d thỏa $d(\epsilon_s)$=0, ta tính được

$$P(s-1,d)=\begin{cases}\dfrac{s-1}{s} & khi \quad d(\epsilon_{s-1})=0\\ \dfrac{s-1}{(s-1)s} & khi \quad d(\epsilon_{s-1})=1\end{cases}$$

là xác suất chọn được đối tượng tối ưu khi hệ thống ở trạng thái ϵ_{s-1}. Do $\dfrac{s-1}{s}\geq\dfrac{1}{s}$ nên giá trị của quyết định tối ưu khi $x=\epsilon_{s-1}$ là $d^0(\epsilon_{s-1}$ = 0); do đó $P(s-1,d^0)$ = $\dfrac{s-1}{s}$. Giả sử những giá trị của quy tắc quyết định tối ưu là d^0(x) = 0 khi $x=\epsilon_0...\epsilon_s$, nghĩa là hệ thống sẽ dừng lại khi nó ở một trong các trạng thái $\epsilon_0...\epsilon_s$. Với quy tắc quyết định d thỏa d(x)0 khi x=$\epsilon_k,...,\epsilon_s$, ta tính được

$$P(k-1,d)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{s} \text{ khi } d(\epsilon_{k-1})=0\\ \dfrac{k-1}{(k-1)k}\dfrac{k}{s}+\dfrac{k-1}{k(k+1)}\dfrac{k+1}{s}+...+\dfrac{k-1}{(s-1)s}\dfrac{s}{s}\\ \text{khi } d(\epsilon_{k-1})=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{k-1}{s} \text{ khi } d(\epsilon_{k-1})=0\\ \dfrac{k-1}{s}\left(\dfrac{1}{k-1}+\dfrac{1}{k}+...+\dfrac{1}{s-1}\right) \text{ khi } d(\epsilon_{k-1})=1\end{cases}$$

Từ kết quả này ta phải có

$$d^0(\epsilon_{k-1})=\begin{cases}0 \; khi \; \dfrac{1}{k-1}+\dfrac{1}{k}+\;...\;\dfrac{1}{s-1}\leq 1\\ 1 \; khi \; \dfrac{1}{k-1}+\dfrac{1}{k}+\;...\;\dfrac{1}{s-1}>1\end{cases}$$

Đặt s_0 là số nguyên lớn nhất sao cho $\dfrac{1}{s_0-1}+\dfrac{1}{s_0}+...+\dfrac{1}{s-1}>1$ Bằng phương pháp quy nạp ta đã chứng minh được d^0(x)=0 khi $x=\epsilon_{s_0},..,\epsilon_s$ và $d^0(\epsilon_{s_0-1})=1$. Một cách tự nhiên hay có thể chứng minh trực tiếp ta có thể thấy được d^0(x)=1 khi $x=\epsilon_1...\epsilon_{s_0-1}$. Chẳng hạn, xét quy tắc quyết định d thỏa d(x)=0 khi x=$\epsilon_{s_0}...\epsilon_s$ và $d(\epsilon_{s_0-1})$. Khi đó ta có P(k,d)=$\dfrac{k}{s}$ khi k=s_0...s và

$$p(s_0-1,d)=\frac{s_0-1}{s}\left(\frac{1}{s_0-1}+\frac{1}{s_0}+...+\frac{1}{s-1}\right)$$
$$>\frac{s_0-1}{0}\text{Nếu } d(\epsilon_{s_0-2})=0$$
$$\text{thì } P(s_0-2,d)=\frac{s_0-2}{2} \text{ và nếu } d(\epsilon_{s_0-2})=1$$
$$\text{thì } P(s_0-2,d)=\frac{s_0-2}{(s_0-2)(s_0-1)}P(s_0-1,d)+$$
$$\frac{s_0-2}{(s_0-1)s_0}\frac{s_0}{s}+...+\frac{s_0-2}{(s-1)s}\frac{s}{s}>$$
$$\frac{s_0-2}{s}\left(\frac{1}{s_0-2}+\frac{1}{s_0-1}+...+\frac{1}{s-1}\right)>\frac{s_0-2}{s}$$

Do đó ta phải có $d^0(\epsilon_{s_0-2}=1)$. Vậy ta thu được quy tắc quyết định tối ưu của bài toán chọn đối tượng tốt nhất là

$$d^0(x)=\begin{cases}1 & khi \quad x=\epsilon_1,...\epsilon_{s_0-1}\\ 0 & khi \quad x=\epsilon_{s_0}...\epsilon_s\end{cases}$$

Nghĩa là người quan sát phải tiếp tục xem xét các đối tượng lấy ra từ tập hợp s đối tượng ban đầu cho đến khi tìm được đối tượng thứ k $\geq$ s_0 mà nó là tốt hơn tất cả các đối tượng được xem xét trước nó thì chọn đối tượng thứ k ấy và xem nó là đối tượng tốt nhất cần tìm.

III. KẾT LUẬN

Như vậy với việc vận dụng xích Markov và các công thức xác suất, ta đã tìm được quy tắc quyết định tối ưu của bài toán chọn đối tượng tối ưu. Người quan sát hoàn toàn có thể xảy ra khả năng loại bỏ đối tượng tối ưu trong quá trình khảo sát của anh ta, và do đó không thể chọn được đối tượng nào cả. Bên cạnh đó, nếu số đối tượng là lớn, thì hầu như mọi người quan sát đều không chấp nhận đối tượng đầu tiên và hy vọng rằng sẽ tìm được đối tượng tốt hơn sau đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nabendu Pal, Sahadeb Sarkar. *Statistics Concepts and Applications*. New Delhi: Prentice Hall of India Private Limited; 2008.

[2] Nguyễn Duy Tiến. *Các mô hình xác suất và ứng dụng, Phần I-Xích Markov và ứng dụng*. Hà Nội: Nhà Xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội; 2000.

[3] Rozanov Y A. *Probability Theory: A Concise Course (Translated by Richard A.Silverman)*. New York: Dover Publication, Inc; 1997.

[4] Đinh Văn Gắng. *Lý thuyết xác suất và thống kê*. Hà Nội: Nhà Xuất bản Giáo dục; 2007.