ĐỊNH LÝ KIỂU BERNSTEIN TRONG KHÔNG GIAN GAUSS

Trần Lê Nam[1], Phan Thị Hiệp[2]

Tóm tắt – *Trong bài báo L. Wang [1] đã chứng minh rằng các siêu mặt tự co rút trơn trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$, mà chúng là một đồ thị toàn phần, phải là các siêu phẳng. Trong bài báo này, chúng tôi chỉ ra một siêu mặt tự co rút trơn trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ là một siêu mặt f-cực tiểu trong không gian Gauss. Đồng thời, chúng tôi rút gọn chứng minh của Wang trong bài báo [1].*

Từ khóa: Bernstein, mặt cực tiểu toàn phần, tự co rút, mật độ Gauss.

Abstract – *In the paper L. Wang [1] proved that smooth self-shrinkers in $\mathbb{R}^{n+1}$, that are entire graphs, are hyperplanes. In this paper, we prove that a smooth self-shrinkers in $\mathbb{R}^{n+1}$ is a f-minimal hypersurface in the Gaussian space. Simultaneously, we summarize L. Wang's proof in the paper [1].*

Keywords: Bernstein, entire minimal graph, self-shrinkers, Gaussian density.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu và sự quan tâm đến đa tạp với mật độ được gia tăng rất nhanh do các ứng dụng của nó trong Toán học và Vật lý [2], [3]. Đa tạp với mật độ là một đa tạp Riemann (M, g) với một hàm trơn, dương, thường được dùng là e^{-f} được dùng làm trọng số cho thể tích k-chiều, $k = 1, ..., n$ [2]–[5]. Không gian Gauss là không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ với hàm mật độ $(2\pi)^{-n/2}\ e^{-(x_1^2+...+x_n^2)/2}$. Sau khi được gia thêm mật độ, metric trên M thay đổi nhưng cấu trúc tôpô của M vẫn được giữ nguyên. Do đó, nó là một công cụ rất hữu hiệu khi giải quyết các bài toán liên quan đến tôpô trên đa tạp như giả thuyết Poincaré và định lý tách đa tạp [2].

Cho $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\geq$2, là một hàm khả vi cấp 2 sao cho đồ thị Σ của nó trên toàn bộ $\mathbb{R}^n$ là một mặt cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$. Năm 1917, Bernstein đã chứng minh rằng đồ thị toàn phần Σ của hàm u trên $\mathbb{R}^2$ phải là 1 mặt phẳng. Đồng thời, ông dự đoán đồ thị cực tiểu toàn phần trên $\mathbb{R}^{n+1}$ phải là một siêu phẳng. Năm 1965, Giorgi chứng minh định lý đúng khi $n = 3$ [6]. Sau đó, Giorgi, Almgren và Simons lần lượt chứng minh định lý đúng cho các trường hợp $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Tuy nhiên, Bombieri, Giorgi và Giusti chỉ ra một đồ thị cực tiểu toàn phần không phải là n-phẳng khi $n \geq 8$ vào năm 1967. Bắt đầu từ đó, các nhà hình học quan tâm đến định lý Bernstein với đối chiều cao. Năm 1967, Osserman đã chứng minh rằng một đường cong giải tích phức có đồ thị toàn phần là một mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ và xây dựng được một đồ thị toàn phần cực tiểu không phải là đường cong giải tích phức [7]. Đó là đồ thị của hàm $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^x - 3e^{-x})\left(\cos\frac{y}{2}, -\sin\frac{y}{2}\right).$$

Kết quả mới nhất của bài toán là giả thuyết hàm u khả vi cấp hai và có Jacobian bị chặn của Hasanis, Halila và Vlachos [8].

Nếu chúng ta gia thêm mật độ vào các không gian trong định lý Bernstein thì định lý nói chung không còn đúng. Ví dụ [9] mặt tịnh tiến được cho bởi tham số $X(u, v) = \big(u, v, g(u) + h(v)\big)$, ở đó

$$\begin{cases} g(u) = u, \\ h(v) = -2\log|\cos(v/\sqrt{2})|, u, v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

là f-cực tiểu toàn phần trong không gian $\mathbb{R}^3$ với hàm mật độ e^z, khác mặt phẳng. Tuy nhiên, định lý Bernstein vẫn còn đúng trong một số không gian với mật độ. Chẳng hạn không gian Gauss [1] hay không gian tích $\mathbb{G}^n \times \mathbb{R}$ [10]. Năm 2011, L. Wang đã chứng minh rằng các siêu mặt tự co rút trơn trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$, mà chúng là các đồ thị toàn, phải là các siêu phẳng [1]. Điều này tương đương với một đồ thị toàn phần, f-cực tiểu trong không gian Gauss $(n+1)$-chiều phải là một siêu phẳng.

Mục thứ 2 của bài báo sẽ chỉ ra một mặt tự co rút trơn trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ là một siêu mặt

[1]Khoa Sư phạm Toán – Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
[2]Khoa Tiểu học – Mầm non, Trường Đại học Đồng Tháp
Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi các đề tài mã số 101.04-2014.26

Ngày nhận bài: 31/8/2016, ngày nhận kết quả bình duyệt: 17/10/2016, ngày chấp nhận đăng: 20/12/2016

f-cực tiểu trong không gian Gauss. Trong mục 3, chúng tôi giới thiệu đánh giá trị lớn nhất của họ hàm tự co rút trong [11] của T. H. Colding và W.P. Minicozzi. Sau đó, chúng tôi sử dụng kết quả đó để để rút gọn chứng minh của L. Wang trong bài báo [1].

II. DÒNG TỰ CO RÚT VÀ SIÊU MẶT F-CỰC TIỂU TRONG KHÔNG GIAN GAUSS

A. Nghiệm tự đồng dạng của dòng độ cong trung bình

Cho M là một siêu mặt trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$. Phép nhúng phụ thuộc thời gian

$$x_t = x(.,t) : M \times [o,T) \to i^{n+1}, \quad (2.1)$$

ở đó $[0,T) \subset i$, là một nghiệm của dòng độ cong trung bình nếu

$$\frac{\partial}{\partial t}x(p,t) = -H(p,t)N(p,t), p \in M, t \in [0,T),$$

với $H(p,t), N(p,t)$ lần lượt là độ cong trung bình và vector pháp đơn vị của siêu mặt $x_t(M)$ tại $x_t(p)$.

Xét các nghiệm của dòng độ cong trung bình dạng $x(u,t) = \lambda(t)x_0(u)$, ở đó $\lambda(t) > 0$. Khi đó, chúng ta có

$$\lambda'(t)x_0 = \big\langle H\big(\lambda(t), x\big), N\big(\lambda(t)\big)\big\rangle.$$

Từ đó, chúng ta được

$$H(x_0) = a\langle x_0, N(x_0)\rangle, \quad (2.2)$$

với $a = \lambda\lambda'$ là một hằng số và $\lambda = \sqrt{\lambda_0^2 + 2at}$.

Chúng ta xét 2 trường hợp sau của hằng số a.

+ Nếu $a < 0$ thì $\lambda \to 0$ khi $t \to \dfrac{-\lambda_0}{2a}$. Ta gọi x_t là một nghiệm *tự co rút*.

+ Nếu $a > 0$ thì $\lambda \to \infty$ khi $t \to \infty$. Ta gọi x_t là một nghiệm *tự giãn nở*.

B. Siêu mặt f-cực tiểu trên đa tạp với mật độ

Trên đa tạp M với mật độ e^{-f}, Gromov đã đề xuất định nghĩa f-độ cong trung bình của siêu mặt Σ [5] bởi đẳng thức

$$H_f = H + \frac{df}{dN}, \quad (2.3)$$

ở đó H, N lần lượt là độ cong trung bình và vector pháp đơn vị của Σ. Định nghĩa trên đã được kiểm tra thỏa mãn biến phân thứ nhất và thứ hai của phiếm hàm f-diện tích [2], [3], [5]. Siêu mặt Σ được gọi là f-cực tiểu nếu $H_f = 0$.

C. Nhận xét

Trên không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ với mật độ $e^{a|x|^2/2}$, f-độ cong trung bình của siêu mặt xác định bởi x_t được cho bởi

$$H_f = H - a\langle x, N\rangle. \quad (2.4)$$

Do đó, từ hai đẳng thức (2.2) và (2.4), các siêu mặt được xác định bởi x_t trong (2.1) là f-cực tiểu trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ với mật độ $e^{a|x|^2/2}$ khi và chỉ khi chúng là nghiệm tự co rút nếu $a < 0$ hoặc là nghiệm tự giãn nở nếu $a > 0$.

III. ĐỊNH LÝ KIỂU BERNSTEIN TRONG KHÔNG GIAN GAUSS

Bổ đề 3.1 (Colding – Minicozzi, [11]) Cho $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ là một siêu mặt không biên có độ cong trung bình thỏa $H = \frac{1}{2}\langle N, x\rangle$ ở đó N là vector pháp đơn vị của Σ. Xét toán tử L được cho bởi

$$L = \Delta + |A|^2 - \frac{1}{2}\langle x, \nabla\rangle + \frac{1}{2},$$

ở đó $|A|^2$ là bình phương chuẩn của dạng cơ bản thứ hai. Khi đó, chúng ta có

$$LH = H \text{ và } L\langle v, N\rangle = \frac{1}{2}\langle v, N\rangle,$$

với mọi vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Với mỗi số thực dương R, ký hiệu B_R là hình cầu tâm O bán kính R trong không gian $\mathbb{R}^n$ và M_R là giá trị lớn nhất của $|u(x_i)|$ trên B_R.

Bổ đề 3.2 (Colding – Minicozzi, [11]) Cho $W(.,t) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, t \in I \subset \mathbb{R}$, là một họ các hàm trơn. Khi đó, nếu $\rho \geq \sqrt{2n+1}$ và $w : B_{pR} \times [0, R^2] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$w_t = \sqrt{1 + |\nabla w|^2}\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1 + |\nabla w|^2}}\right)$$

thì

$$\max_{B_R \times [0,R^2]} |w(x,t)| \leq \frac{2n+1}{\rho}R + \max_{B_{\rho R}} |w(x,0)|.$$

Định lý 3.3 (Định lý kiểu Bernstein trong không gian $\mathbb{G}^{n+1}$, Wang [1]) Giả sử hàm trơn $u(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình tự co rút

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2}\right) = \frac{x_1 u_{x_1} + L + x_n u_{x_n} - u}{2\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \quad (3.1)$$

Khi đó, $u = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ với các hằng số $a_i \in \mathbb{R}$.

Để chứng minh định lý trên, chúng ta chứng minh 2 bổ đề sau.

Bổ đề 3.4 [1] với mỗi số thực $R > 1$, đồ thị Σ của hàm u thỏa mãn

$$\mathrm{Vol}\,(\Sigma \cap B_R) \leq C_0R^{n+2}, \tag{3.2}$$

ở đó hằng số C_0 không phụ thuộc vào R.

Chứng minh. Với số thực dương $R > 1$, ký hiệu M_R là giá trị lớn nhất của $|u(x)|$ trên B_R. Chúng ta xét hàm

$$w(x_1, \ldots, x_n, t) = \sqrt{R^2 + 1 - t}$$
$$u\left(\frac{x_1}{\sqrt{R^2+1-t}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{R^2+1-t}}\right),$$

ở đó $t \in [0, R^2]$. Khi đó,

$$w_t = \sqrt{1 + |\nabla w|^2} div \frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}$$

Chọn $\rho = 2n + 1$, áp dụng Bổ đề 3.2, chúng ta được

$$\max_{B_R} |w(x, R^2)| \leq \frac{2n+1}{2n+1} R + \max_{B_{(2n+1)R}} |w(x, 0)|.$$

Từ đẳng thức trên, chúng ta suy ra,

$$\max_{B_R} |u(x)| \leq R + \sqrt{R^2+1}$$
$$\max_{B_{(2n+1)R}} \left| u\left(x_1/\sqrt{R^2+1}, \ldots, x_n/\sqrt{R^2+1}\right)\right|.$$

Do đó,

$$M_R = \max_{B_R} |u(x)| \leq R + 2R \max_{B_{2n+1}} |u(x)|$$
$$= (1 + 2M_{2n+1})R.$$

Mặt khác, chúng ta thác triển trường vector pháp N song song dọc e_n+1 lên hình trụ $B_R \times \mathbb{R}$ và vẫn ký hiệu trường vector thác triển đó là N. Gọi ω là n-dạng trên trụ $B_R \times \mathbb{R}$ được cho bởi

$$\omega(x_1, ...x_n) = det(x_1, ...x_n, N), \tag{3.3}$$

với mọi $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^n$.
Khi đó, từ đẳng thức (3.1), chúng ta có

$$d\omega = (-1)^{n+1} \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) dx_1 \ldots dx_{n+1}$$
$$= (-1)^{n+1} \frac{x_1u_{x_1} + \cdots + x_nu_{x_n} - u}{2\sqrt{1+|Du|^2}} dx_1 \ldots dx_{n+1}.$$

Theo bất đẳng thức Hölder,

$$|d\omega| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + u^2},$$

Từ đẳng thức (3.3), với hệ vector trực chuẩn $x_1,...x_n$ cho trước tại điểm (x_i) ta được

$$|\omega(x_1, ...x_n) \leq 1|,$$

ở đó đẳng thức thỏa mãn khi và chỉ khi

$$X_1, \ldots, X_n \in T_p\Sigma,\ p$$
$$= \big(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

Chú ý rằng $\partial B_R \cap \Sigma$ chia biên ∂B_R thành 2 thành phần và gọi ∂B_R^1 là thành phần có thể tích nhỏ hơn hoặc bằng ω_nR^n. Gọi Ω là miền được bao bởi $\partial B_R \cup \Sigma$. Do đó, theo định lý Stoke, chúng ta có

$$\mathrm{Vol}\,(\Sigma \cap B_R) = \int_{\Sigma\cap\partial\Omega} \omega \leq \int_{\partial B_R^1} \omega + \int_\Omega d\omega$$
$$\leq \mathrm{Vol}\left(\partial B_R^1\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + u^2}.$$

Do Ω được chứa trong hình trụ $\widetilde{\Omega} = B_R \times [-\max\{R, M_R\}], \max\{R, M_R\}]$ nên

$$\mathrm{Vol}(\Sigma \cap B_R) \leq \omega_nR^n + \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} (M_R + R)$$
$$\leq \omega_nR^n + \omega_nR^n(M_R + R)^2.$$

Do đó,

$$\mathrm{Vol}(\Sigma \cap B_R) \leq 2\omega_nR^n(1 + R^2 + M_R^2)$$
$$\leq 2\omega_nR^n\left(1 + R^2 + (1 + 2M_{2n+1})^2R^2\right).$$

Chọn $C_0 = 2\omega_n[2 + (1 + 2M_{2n+1})^2]$, chúng ta được bất đẳng thức (3.2).

Bổ đề 3.5 [1] cho η là một hàm có giá compact trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó, đồ thị Σ của hàm u thỏa mãn

$$\int_\Sigma \eta^2|A|^2e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma\eta|^2e^{\frac{-|\frac{r}{x}|^2}{4}},$$

ở đó $|A|^2$ là chuẩn bình phương của ma trận dạng cơ bản thứ hai.

Chứng minh.

Xét hàm $h = \langle N, v_{n+1}\rangle$ với $v_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$. Theo Bổ đề 3.1, ta có $Lh = \frac{1}{2}h$

do hàm h dương nên chúng ta có thể định nghĩa hàm $g = \log h$. Khi đó, hàm g thỏa mãn phương trình vi phân

$$\nabla_\Sigma g - \frac{1}{2}\langle \vec{x}, \nabla_\Sigma g\rangle + |\nabla_\Sigma g|^2 + |A|^2 = 0 \quad (3.4)$$

Nhân 2 vế của phương trình (3.4) cho $\eta^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ và lấy tích phân 2 vế trên Σ, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Sigma \eta^2 \operatorname{div}_\Sigma \left(e^{\frac{-|x|^2}{4}} \nabla_\Sigma g \right) + \int_\Sigma \eta^2 \left(|\nabla_\Sigma g|^2 + |A|^2 \right) e^{\frac{-|x|^2}{4}} \\
&= -\int_\Sigma 2\eta \langle \nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma g\rangle e^{\frac{-|x|^2}{4}} + \int_\Sigma \eta^2 \left(|\nabla_\Sigma g|^2 + |A|^2 \right) e^{\frac{-|x|^2}{4}} \\
&\geq -\int_\Sigma \eta^2 \left(|\nabla_\Sigma g|^2 + |\nabla_\Sigma \eta|^2 \right) e^{\frac{-|x|^2}{4}} \\
&\quad + \int_\Sigma \eta^2 \left(|\nabla_\Sigma g|^2 + |A|^2 \right) e^{\frac{-|x|^2}{4}} \\
&\geq -\int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta|^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}} + \int_\Sigma \eta^2 |A|^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\int_\Sigma \eta^2 |A|^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta|^2 e^{\frac{-|\frac{r}{x}|^2}{4}}.$$

Chúng ta đi chứng minh Định lý 3.3.

Chọn một dãy số thực $R_j = e^j, j = 1, 2, \ldots$ và xét dãy hàm cut-off η_j được xác định bởi

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } |x| \leq R_j, \\ \ln\left(e^{j+1}/|x|\right) & \text{khi } R_j < |x| < R_{j+1}, \\ 0 & \text{khi } |x| \geq R_{j+1}. \end{cases}$$

Khi đó, η_j thỏa mãn $0 \leq \eta_j \leq 1$, η_j bằng 1 bên trong hình cầu B_R, triệt tiêu bên ngoài hình cầu $B_{R_{j+1}}$ và $|\nabla_\Sigma \eta_j| \leq 1$. Theo Bổ đề 3.4, chúng ta có khi $j \to \infty$,

$$\int_\Sigma |\nabla_\Sigma \eta_j|^2 e^{-\frac{|\frac{r}{x}|^2}{4}} \leq \int_{\Sigma \cap (B_{R_{j+1}}, B_{R_j})} e^{-\frac{|\frac{r}{x}|^2}{4}} \to 0.$$

Áp dụng Bổ đề 3.5 và định lý hội tụ đơn điệu, chúng ta có $\int_\Sigma |A|^2 e^{-\frac{|\frac{r}{x}|^2}{4}} = 0$.

Do đó, $|A|^2 = 0$ và $u = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ với các hằng số $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

IV. KẾT LUẬN

Mục 2 của bài báo giới thiệu hai khái niệm: dòng độ cong trung bình và siêu mặt f-cực tiểu. Từ đó, chúng tôi chỉ ra một siêu mặt tự co rút trơn trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ là một siêu mặt f-cực tiểu trong không gian Gauss. Trong mục 3, chúng tôi giới thiệu hai kết quả về đánh giá sự biến thiên cực đại của dòng độ cong trung bình. Sau đó, chúng tôi sử dụng các kết quả đánh giá, xây dựng một họ hàm cut-off để đưa ra một chứng minh ngắn gọn cho định lý kiểu Bernstein trong không gian Gauss. Mặc dù bài báo chứng minh lại kết quả của L. Wang [1] theo ý tưởng đánh giá chuẩn bình phương của dạng cơ bản thứ II nhưng các chứng minh đã sử dụng các ước lượng, đánh giá sắc bén của dòng độ cong trung bình, kết hợp với việc xây dựng 1 họ hàm cut-off tốt. Nhờ vào đó, kết quả được chúng minh ngắn hơn so với bài báo của Wang [1].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Wang L. A Bernstein type theorem for self-similar shrinkers. *Geom Dedicata*. 2011;151:297–303.

[2] Morgan F. Manifolds with density. *Notices Amer Math Soc*. 2005;52:853–858.

[3] Corwin R, Hoffman N, Hurder S, Sesum V, Xu Y. Differential geometry of manifolds with density. *Rose-Hulman Und Math J*. 2006;7(1).

[4] Bombieri E, Giorgi E D, Giusti E. Minimal cones and the Bernstein conjecture. *Invent Math*. 1969;7:243–268.

[5] Gromov M. Isoperimetry of waists and concentration of maps. *Geom Funct Anal*. 2003;13:178–215.

[6] Giorgi E D. Una extensione del teorema di Bernstein. *Ann Scuola Norm Sup Pisa*. 1965;19:79–85.

[7] Chern S S, Osserman R. Complete minimal surfaces in Euclidean n-space. *J d'Analyse Math*. 1967;19:15–34.

[8] Hasanis T, Halila A S, Vlachos T. Minimal graphs in i^4 with bounded Jacobians. *Proc Amer Math Soc*. 2009;137:3463–3471.

[9] Doan The Hieu, Nguyen Minh Hoang. Ruled minimal surfaces in i^3 with density e^z. *Pacific Journal of Mathematics*. 2009;243:277–285.

[10] Doan The Hieu, Tran Le Nam. Bernstein type theorem for entire weighted minimal graphs in $G^n \times i$. *Journal of Geometry and Physics*. 2014;81:89–91.

[11] Colding T H, Minicozzi W P. Smooth compactness of self-shrinkers. *Comment Math Helv*. 2012;87:463–475.