ĐỊNH LÍ HỘI TỤ CHO ĐIỂM CHUNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ÁNH XẠ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN $(\phi\text{-}E_\mu)$ TRONG KHÔNG GIAN BANACH TRƠN ĐỀU VÀ LỒI ĐỀU

Nguyễn Trung Hiếu[1], Trương Cẩm Tiên[1]

A CONVERGENCE THEOREM FOR COMMON ELEMENTS OF EQUILIBRIUM PROBLEMS AND MAPPINGS SATISFYING CONDITION $(\phi\text{-}E_\mu)$ IN UNIFORMLY CONVEX AND UNIFORMLY SMOOTH BANACH SPACES

Nguyen Trung Hieu[1], Truong Cam Tien[2]

Tóm tắt – *Trong nghiên cứu này, chúng tôi đề xuất một dãy lặp lai ghép mới để tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$, thiết lập sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Từ định lí này, chúng tôi nhận được một hệ quả về sự hội tụ của dãy lặp cho bài toán cân bằng và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert thực. Đồng thời, một ví dụ được đưa ra để minh họa cho sự hội tụ dãy lặp cho bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$. Các kết quả của nghiên cứu này là mở rộng và cải tiến của một số kết quả trong tài liệu tham khảo*

Từ khóa: ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$, bài toán cân bằng, dãy lặp lai ghép, không gian Banach trơn đều và lồi đều.

Abstract – *In this paper, we propose a new hybrid iteration for finding a common element of solution set of equilibrium problems and the fixed point set of mappings satisfying condition $(\phi\text{-}E_\mu)$, and establish the convergence of this iteration in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. From this theorem, we get a corollary for the convergence for equilibrium problems and mappings satisfying condition (E_μ) in real Hilbert spaces. In addition, an example is provided to illustrate for the convergence of equilibrium problems and mappings satisfying condition $(\phi\text{-}E_\mu)$. These results are the generations and improvements of some existing results in the literature.*

Keywords: mapping satisfying $(\phi\text{-}E_\mu)$, equilibrium problem, hybrid iteration, uniformly convex and uniformly smooth Banach space.

I. GIỚI THIỆU

Nhiều vấn đề trong toán học và những ngành khoa học kĩ thuật khác dẫn đến việc giải bài toán (EP) sau: *"Tìm điểm $x \in C$ sao cho $f(x,y) \geq 0$ với mọi $y \in C$, trong đó C là tập lồi, đóng và $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$"*. Bài toán (EP) được gọi là *bài toán cân bằng* và được giới thiệu năm 1994 bởi Blum et al. [1]. Bài toán (EP) được xem như là bài toán bất đẳng thức Ky Fan và là tổng quát của nhiều mô hình toán học khác như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động. Kĩ thuật cơ bản để giải bài toán cân bằng (EP) là xây dựng dãy lặp và thiết lập sự hội tụ của dãy lặp này đến nghiệm của bài toán

[1] Khoa Sư phạm Toán học, Trường Đại học Đồng Tháp
Ngày nhận bài: 07/11/2017, ngày nhận kết quả bình duyệt: 14/3/2018, ngày chấp nhận đăng: 10/4/2018.
Email: ngtrunghieu@dthu.edu.vn
[1,2] Faculty of Mathematics Teacher Education, Dong Thap University
Received date: 07^{th} November 2018; Revised date: 14^{th} March 2018; Accepted date: 10^{th} April 2018

hoặc hội tụ đến hình chiếu của điểm xuất phát lên tập nghiệm của bài toán.

Bên cạnh việc tìm nghiệm của bài toán cân bằng, vấn đề tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động của các ánh xạ phi tuyến cũng được nhiều tác giả quan tâm. Năm 2009, Takahashi et al. [2] đã giới thiệu dãy lặp lai ghép để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ tương đối không giãn trong không gian Banach trơn đều và lồi đều; Qin et al. [3] đã đề xuất một dãy lặp để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của hai ánh xạ tựa ϕ-không giãn trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Năm 2016, Alizadeh et al. [4] đã đề xuất một dãy lai ghép để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ hỗn hợp tổng quát trong không gian Hilbert. Lưu ý rằng, ở mỗi bước lặp của dãy lặp trong Alizadeh et al. [4], chúng ta phải thực hiện tính toán để tìm hai tập C_n và Q_n. Năm 2017, Trương Cẩm Tiên và cộng sự [5] đã nghiên cứu tổng quát các kết quả chính trong Alizadeh et al. [4] sang không gian Banach, cụ thể là các tác giả đã giới thiệu khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ), đề xuất một dãy lặp lai ghép để tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ), đồng thời thiết lập sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Để ý rằng, dãy lặp trong Trương Cẩm Tiên và cộng sự [5] đã bớt tập Q_n. Tuy nhiên, khi xét trong không gian Hilbert thì dãy lặp trong Trương Cẩm Tiên và cộng sự [5] không có dạng dãy lặp trong Alizadeh et al. [4]. Hơn nữa, ở mỗi bước lặp, chúng ta phải tìm tập C_{n+1} với độ tính toán phức tạp. Chính vì vậy, trong nghiên cứu này, chúng tôi đề xuất một dãy lặp lai ghép mới để tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ), thiết lập sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Từ đó, chúng tôi nhận được một kết quả về sự hội tụ của dãy lặp lai ghép cho bài toán cân bằng và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả.

II. TỔNG QUAN

Mục này trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài viết. Lưu ý rằng trong bài viết này, chúng tôi xét E là không gian Banach thực.

Định nghĩa 1 ([6]). Cho E là không gian Banach và $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Khi đó,

(1) Không gian E được gọi là *lồi chặt* nếu U lồi chặt, nghĩa là $\|x + y\| < 2$ với mọi $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ và $x \neq y$.

(2) Không gian E được gọi là *lồi đều* nếu với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|x + y\| < 2(1-\delta)$ với mọi $x, y \in E$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| = \varepsilon$.

(3) Không gian E được gọi là *trơn* nếu với mỗi $x, y \in U$, tồn tại

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}. \tag{1}$$

(4) Không gian E được gọi là *trơn đều* nếu giới hạn (1) là giới hạn đều với $x, y \in U$.

Từ định nghĩa trên, chúng ta thấy rằng nếu E là không gian Banach lồi đều thì E là không gian Banach lồi chặt và phản xạ; nếu E là không gian Banach trơn đều thì E là không gian Banach trơn và phản xạ.

Cho E là một không gian Banach với chuẩn $\|.\|$ và E^* không gian liên hợp của E. Kí hiệu $\langle x, f\rangle$ là giá trị của ánh xạ tuyến tính $f \in E^*$ tại $x \in E$. Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to 2^{E^*}$ được định nghĩa bởi

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

với mọi $x \in U$.

Bổ đề 2 ([6]). *Cho E là không gian Banach.*

(1) Nếu E là không gian Banach trơn thì J là ánh xạ đơn trị, liên tục yếu theo chuẩn và $\|Ju\| = \|u\|$ với mọi $u \in E$.*

(2) Nếu E là không gian Banach lồi chặt, tự liên hợp thì J^{-1} là ánh xạ liên tục yếu theo chuẩn.*

(3) Nếu E là không gian Banach trơn, lồi chặt, tự liên hợp thì J là song ánh và $\|J^{-1}u\| = \|u\|$ với mọi $u \in E^*$.

(4) Nếu E là không gian Banach trơn đều thì J là ánh xạ liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của E.

(5) Nếu E là không gian Hilbert thì J là ánh xạ đồng nhất.

(6) Không gian Banach E là trơn đều nếu và chỉ nếu E^* là không gian Banach lồi đều.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất của phiếm hàm Lyapunov trong không gian Banach trơn. Giả sử rằng E là một không gian Banach trơn. Xét phiếm hàm Lyapunov $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2 \qquad (2)$$

với mọi $x, y \in E$.

Nhận xét 3 ([6])**.** Từ định nghĩa của phiếm hàm ϕ, ta được

(1) Nếu E là không gian Hilbert thì (2) trở thành $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$ với mọi $x, y \in E$.

(2) Với mọi $x, y \in E$, ta có

$$(||x|| - ||y||)^2 \leq \phi(x, y) \leq (||x|| + ||y||)^2 \qquad (3)$$

và

$$\begin{aligned} &\phi(x, J^{-1}(\lambda Jy + (1-\lambda)Jz)) \\ \leq\ & \lambda\phi(x, y) + (1-\lambda)\phi(x, z). \end{aligned} \qquad (4)$$

(3) Cho E là không gian Banach trơn, lồi chặt và phản xạ. Khi đó, $\phi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$ với mọi $x, y \in E$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan đến sự hội tụ trong không gian Banach lồi đều và trơn.

Bổ đề 4 ([7], Proposition 2)**.** *Cho E là một không gian Banach lồi đều, trơn và hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong E. Khi đó, nếu $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, y_n) = 0$ và $\{x_n\}$ bị chặn hoặc $\{y_n\}$ bị chặn thì $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

Bổ đề 5 ([7], Proposition 2)**.** *Cho E là một không gian Banach lồi đều, trơn và hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ trong E sao cho $\{x_n\}$ bị chặn và $\{y_n\}$ bị chặn. Khi đó,*

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \phi(x_n, y_n) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \|Jx_n - Jy_n\| = 0 \end{aligned}$$

Bổ đề 6 ([7], Proposition 2)**.** *Cho E là một không gian Banach lồi đều và $r > 0$. Khi đó, tồn tại $g : [0, 2r] \to [0, \infty)$ là hàm số liên tục, tăng chặt và lồi sao cho $g(0) = 0$ và $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)g(\|x-y\|)$ với mọi $\lambda \in [0, 1]$ và $x, y \in B = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$.*

Năm 1996, Alber [6] đã giới thiệu một mở rộng của khái niệm phép chiếu P_C trong không gian Hilbert sang không gian Banach và được gọi là phép chiếu suy rộng Π_C. Tiếp theo, chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất của phép chiếu suy rộng trong không gian Banach.

Bổ đề 7 ([8], p.338)**.** *Cho E là một không gian Banach lồi chặt, trơn và tự liên hợp, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E. Khi đó, với mỗi $x \in E$, tồn tại duy nhất phần tử $\Pi_C x \in C$ sao cho $\phi(x, \Pi_C x) = \inf\{\phi(x, y) : y \in C\}$. Ta gọi ánh xạ Π_C là* phép chiếu *từ E lên C.*

Bổ đề 8 ([8], Lemma 1.3)**.** *Cho E là một không gian Banach lồi chặt, trơn và tự liên hợp, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E và $x \in E$. Khi đó,*

(1) $z = \Pi_C x$ nếu và chỉ nếu $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0$ với mọi $y \in C$.

(2) $\phi(y, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(y, x)$ với mọi $y \in C$.

Năm 2011, Garcia-Falset et al. [9] đã tổng quát khái niệm ánh xạ không giãn thành khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) như sau:

Định nghĩa 9 ([9], Definition 2)**.** Cho E là một không gian Banach, C là một tập con khác rỗng trong E và $T : C \longrightarrow C$ là một ánh xạ. Khi đó, ánh xạ T được gọi là một *ánh xạ thỏa mãn điều* *kiện* (E_μ) trong C nếu tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho với mọi $x, y \in C$, ta có

$$\|x - Ty\| \leq \mu\|x - Tx\| + \|x - y\|.$$

Kí hiệu $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ là tập điểm bất động của ánh xạ T. Tiếp theo, chúng tôi trình bày khái niệm ánh xạ ϕ-không giãn và ánh xạ tựa ϕ-không giãn được giới thiệu bởi Qin et al. [10].

Định nghĩa 10 ([10], p.1052)**.** Cho E là một không gian Banach trơn, C là một tập con khác rỗng trong E, $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm Lyapunov và ánh xạ $T : C \longrightarrow C$. Khi đó,

(1) T được gọi là ánh xạ *ϕ-không giãn* nếu $\phi(Tx, Ty) \leq \phi(x, y)$ với mọi $x, y \in C$.

(2) T được gọi là ánh xạ *tựa ϕ-không giãn* nếu $\phi(p, Ty) \leq \phi(p, y)$ với mọi $y \in C$ và $p \in F(T)$.

Năm 2017, Trương Cẩm Tiên và cộng sự [5] đã sử dụng phiếm hàm Lyapunov để mở rộng khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) thành khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn như sau:

Định nghĩa 11 ([5], Định nghĩa 2.1)**.** Cho E là một không gian Banach trơn, C là một tập con khác rỗng trong E, $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm Lyapunov và ánh xạ $T : C \longrightarrow C$. Khi đó, T được gọi là *ánh xạ thỏa mãn điều kiện* $(\phi\text{-}E_\mu)$ nếu tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho với mọi $x, y \in C$, ta có

$$\sqrt{\phi(x, Ty)} \leq \mu\sqrt{\phi(x, Tx)} + \sqrt{\phi(x, y)}.$$

Nhận xét 12 ([5], Nhận xét 2.2)**.** Nếu E là không gian Hilbert thì ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).

Ví dụ sau minh họa cho khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$.

Ví dụ 13. Xét $E = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn $\|u\| = |u|$ với mọi $u \in E$, $C = [-1, 1]$. Khi đó, ánh xạ $J = I$ và phiếm hàm Lyapunov $\phi(u, v) = (u - v)^2$ với mọi $u, v \in E$ và $T : C \longrightarrow C$ được xác định bởi $Tx = \dfrac{x}{x+2}$ với mọi $x \in C$. Khi đó, T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ với $\mu \geq 1$. Thật vậy, ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Với $x = 0$ và với mọi $y \in C$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\phi(x, Ty)} &= |0 - Ty| = |\frac{y}{y+2}| \leq |y| \\ &= \sqrt{\phi(x, y)} = \mu\sqrt{\phi(x, Tx)} + \sqrt{\phi(x, y)}. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. Với $x \neq 0$ với mọi $y \in C$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\phi(x, Ty)} &= |x - \frac{y}{y+2}| \\ &\leq |y - \frac{2}{y+2} + 1| + |x - y|. \end{aligned}$$

Đặt $f(t) = t - \dfrac{2}{t+2} + 1$ với $t \in C$. Khi đó, ta có $\max_{t \in C} |f(t)| = f(-1) = 2$ và $\min_{t \in C} |f(t)| = f(0) = 0$. Suy ra tồn tại $c \in C$ sao cho $f(c) = \min_{t \in C, t \neq 0} |f(t)| \neq 0$. Do đó, tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho

$$\begin{aligned} |y - \frac{2}{y+2} + 1| &\leq |f(-1)| = 2 \leq \mu|f(c)| \\ &\leq \mu|x - \frac{2}{x+2} + 1| = \mu\sqrt{\phi(x, Tx)}. \end{aligned}$$

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho

$$\sqrt{\phi(x, Ty)} \leq \mu\sqrt{\phi(x, Tx)} + \sqrt{\phi(x, y)}.$$

Điều này có nghĩa là T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ với $\mu \geq 1$.

Mặt khác, T không là ánh xạ ϕ-không giãn. Thật vậy, chọn $x = -0.9, y = -0.8$, ta có $\phi(Tx, Ty) = 0.02 > 0.01 = \phi(x, y)$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả về tính chất cho tập điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach lồi đều và trơn.

Mệnh đề 14 ([5], Mệnh đề 2.3)**.** *Cho E là một không gian Banach trơn, C là một tập con khác rỗng trong E, $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm Lyapunov và ánh xạ $T : C \longrightarrow C$. Khi đó, nếu T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong C sao cho $F(T) \neq \varnothing$ thì T ánh xạ tựa ϕ-không giãn trong C.*

Mệnh đề 15 ([5], Mệnh đề 2.4)**.** *Cho E là một không gian Banach trơn đều, lồi đều, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E, $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm Lyapunov và $T : C \longrightarrow C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ) trong C sao cho $F(T) \neq \varnothing$. Khi đó, $F(T)$ là tập con lồi, đóng trong C.*

Mệnh đề 16 ([5], Mệnh đề 2.5)**.** *Cho E là một không gian Banach trơn đều, lồi đều, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E, $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm Lyapunov, ánh xạ $T : C \longrightarrow C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ) và $\{x_n\} \subset C$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, x) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, Tx_n) = 0$. Khi đó, $x \in F(T)$.*

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả về bài toán cân bằng. Xét bài toán cân bằng (EP) như sau: "Tìm điểm $p \in C$ sao cho $f(p, y) \geq 0$ với mọi $y \in C$, trong đó, C là tập lồi, đóng, khác rỗng." Kí hiệu $EP(f) = \{p \in C : f(p, y) \geq 0,$ với mọi $y \in C\}$ là tập nghiệm của bài toán (EP). Để giải bài toán (EP), các tác giả đã xét những giả thiết sau cho song hàm f.

(A1) $f(u, u) = 0$ với mọi $u \in C$.

(A2) f đơn điệu, nghĩa là $f(u, v) + f(v, u) \leq 0$ với mọi $u, v \in C$.

(A3) $\lim_{t\downarrow 0} \sup f(tw + (1-t)u, v) \leq f(u, v)$ với mọi $u, v, w \in C$.

(A4) Với mỗi $u \in C, v \mapsto f(u, v)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới.

Bổ đề sau thiết lập một số tính chất về tập nghiệm của bài toán cân bằng (EP).

Bổ đề 17. *Cho E là một không gian Banach lồi chặt, trơn đều, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E, $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn* (A1) – (A4)*, $r > 0$ và $u \in C$. Khi đó,*

(1) [1] *Tồn tại $w \in C$ sao cho $f(w, y) + \frac{1}{r}\langle y - w, Jw - Ju\rangle \geq 0$ với mọi $y \in C$.*

(2) [2], [3] *Xét ánh xạ $K_r : E \longrightarrow C$ được định nghĩa bởi*

$$K_r = \{w \in C : f(w, y) + \frac{1}{r}\langle y - w, Jw - Ju\rangle \geq 0, \forall y \in C\}.$$

Khi đó

(a) K_r là ánh xạ đơn trị.

(b) K_r là ánh xạ không giãn vững, nghĩa là, với mọi $u, v \in E$, ta có

$$\begin{aligned} &\langle K_r u - K_r v, JK_r u - JK_r v\rangle \\ \leq\ &\langle K_r u - K_r v, Ju - Jv\rangle . \end{aligned}$$

(c) $F(K_r) = EP(f)$.

(d) K_r là ánh xạ tựa ϕ-không giãn.

(e) $\phi(q, K_r u) + \phi(K_r u, u) \leq \phi(q, u)$ với mọi $q \in F(K_r)$.

(f) $EP(f)$ là tập lồi và đóng.

Một kết quả tổng quát của [4, Theorem 3.1] trong không gian Banach trơn đều và lồi đều được thiết lập bởi Trương Cẩm Tiên và cộng sự [5] như sau.

Định lí 18 ([5], Định lí 2.6)**.** *Cho E là một không gian Banach trơn đều và lồi đều, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong $E, f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn các giả thiết* (A1) – (A4)*, $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ là phiếm hàm Lyapunov và $T : C \longrightarrow C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ) sao cho $F := F(T) \cap EP(f) \neq \varnothing$. Xét dãy $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in E,\ C_1 = C,\ x_1 = \Pi_{C_1} x_0, \\ u_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)JTx_n), \\ v_n = K_{r_n} J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1 - \beta_n)JTu_n), \\ w_n = J^{-1}(\gamma_n Ju_n + (1 - \gamma_n)JTv_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : a_n\phi(z, v_n) \\ \qquad +(1 - a_n)\phi(z, w_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0,\ n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

trong đó, K_{r_n} là ánh xạ xác định như trong Bổ đề 17, $0 \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq 1$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(1 - \gamma_n) > 0$, $r_n \in [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$ và $a_n \in (a, b) \subset (0, 1)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $p = \Pi_F x_0$.

Nhận xét 19. Định lí 18 là một tổng quát của [4, Theorem 3.1] từ không gian Hilbert sang không gian Banch trơn đều và lồi đều. Tuy nhiên, ở mỗi bước lặp của dãy lặp trong Định lí 18, chúng ta phải tính toán phức tạp để tìm tập C_{n+1}. Hơn nữa, khi xét E là không gian Hilbert, chúng ta nhận được một dãy lặp không có dạng của dãy lặp trong [4, Theorem 3.1].

III. NỘI DUNG

Trước hết, bằng cách thay tập C_{n+1} trong Định lí 18 bởi tập $C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, w_n) \leq \phi(z, x_n)\}$ đơn giản, chúng tôi thiết lập sự hội tụ của một dãy lặp lai ghép mới cho bài toán cân bằng và ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn đều và lồi đều.

Định lí 20. *Cho E là một không gian Banach trơn đều và lồi đều, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E, $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn các giả thiết* (A1) – (A4), $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *là phiếm hàm Lyapunov và $T : C \longrightarrow C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ sao cho $F := F(T) \cap EP(f) \neq \varnothing$. Xét dãy $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in E, \ C_1 = C, \ x_1 = \Pi_{C_1} x_0, \\ u_n = J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1 - \alpha_n) J T x_n), \\ v_n = K_{r_n} x_n, \\ w_n = J^{-1}(\gamma_n J u_n + (1 - \gamma_n) J T v_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, w_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0, \ n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

trong đó, K_{r_n} là ánh xạ xác định như trong Bổ đề 17, $0 \leq \alpha_n, \ \gamma_n \leq 1$ sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 1$, $\liminf\limits_{n \to \infty} \gamma_n (1 - \gamma_n) > 0$, $r_n \in [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $p = \Pi_F x_0$.

Chứng minh. Ta chứng minh theo 6 bước sau:

Bước 1. Chứng minh phép chiếu $\Pi_F x_0$ xác định.

Bằng cách sử dụng Bổ đề 17, ta có $EP(f)$ là tập lồi, đóng. Theo Mệnh đề 15, ta có $F(T)$ là tập lồi, đóng. Do đó, $EP(f) \cap F(T)$ là tập lồi, đóng. Kết hợp với giả thiết $F := F(T) \cap EP(f) \neq \varnothing$, ta có F là tập lồi, đóng, khác rỗng trong C. Vì vậy, theo Bổ đề 7, ta có phép chiếu $\Pi_F x_0$ xác định.

Bước 2. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ xác định.

Theo Bổ đề 7, để chứng minh dãy $\{x_n\}$ xác định, ta cần chứng minh C_n là tập lồi, đóng, khác rỗng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, ta lưu ý rằng

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{z \in C_n : \phi(z, w_n) \leq \phi(z, x_n)\} \\ &= \{z \in C_n : 2\langle z, Jx_n - Jw_n \rangle \leq \|x_n\|^2 \\ &\qquad -\|w_n\|^2\}. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta chứng minh C_n là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với $n = 1$, ta có $C_1 = C$ là tập đóng. Giả sử C_n là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh C_{n+1} cũng là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Lấy $\{u_{n+1}^{(k)}\}_k$ là dãy trong C_{n+1} và $\{u_{n+1}^{(k)}\}_k$ hội tụ đến $u_{n+1}^{(0)}$. Ta chứng minh $u_{n+1}^{(0)} \in C_{n+1}$. Do $u_{n+1}^{(k)} \in C_{n+1}$ nên $u_{n+1}^{(k)} \in C_n$ và

$$2\langle u_{n+1}^{(k)}, Jx_n - Jw_n \rangle = \|x_n\|^2 - \|w_n\|^2.$$

Do C_n là tập đóng và $\{u_{n+1}^{(k)}\}_k$ hội tụ đến $u_{n+1}^{(0)}$ nên $u_{n+1}^{(0)} \in C_n$. Mặt khác, khi $k \to \infty$ trong bất đẳng thức trên, ta được

$$2\langle u_{n+1}^{(0)}, Jx_n - Jw_n \rangle = \|x_n\|^2 - \|w_n\|^2.$$

Do đó, $u_{n+1}^{(0)} \in C_{n+1}$. Điều này có nghĩa C_{n+1} là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Tiếp theo, ta chứng minh C_n là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với $n = 1$, ta có $C_1 = C$ là tập lồi. Giả sử C_n là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh C_{n+1} cũng là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với $u, v \in C_{n+1}$, ta chứng minh $\alpha u + (1 - \alpha) v \in C_{n+1}$ với $\alpha \in [0, 1]$. Thật vậy, do $u, v \in C_{n+1}$ nên $u, v \in C_n$ và từ định nghĩa của C_{n+1} , ta được

$$2\langle u, Jx_n - Jw_n \rangle = \|x_n\|^2 - \|w_n\|^2 \qquad (5)$$

và

$$2\langle v, Jx_n - Jw_n \rangle = \|x_n\|^2 - \|w_n\|^2. \qquad (6)$$

Do C_n là tập lồi và $u, v \in C_n$ nên

$$\alpha u + (1 - \alpha) v \in C_n.$$

Mặt khác, từ (5) và (6), ta có

$$2\langle \alpha u, Jx_n - Jw_n \rangle = \alpha(\|x_n\|^2 - \|w_n\|^2). \quad (7)$$

và

$$\begin{aligned} & 2\langle (1 - \alpha) v, Jx_n - Jw_n \rangle \\ = \ & (1 - \alpha)(\|x_n\|^2 - \|w_n\|^2). \qquad (8) \end{aligned}$$

Khi đó, sử dụng (8), ta được

$$2\langle \alpha u + (1-\alpha)v, Jx_n - Jw_n\rangle = \|x_n\|^2 - \|w_n\|^2.$$

Điều này có nghĩa là $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_{n+1}$ hay C_{n+1} là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, C_n là tập lồi, đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp theo, ta chứng minh C_n khác rỗng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Để chứng minh điều này, ta chứng minh $F \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với $n = 1$, ta có $F \subset F(T) \subset C = C_1$. Giả sử rằng $F \subset C_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $F \subset C_{n+1}$. Thật vậy, với $u \in F$, theo giả thiết $F \subset C_n$ ta được $u \in C_n$. Theo Mệnh đề 14, ta có T cũng là ánh xạ tựa ϕ-không giãn. Do đó, áp dụng (4), ta được

$$\begin{aligned} & \phi(u, u_n) \\ = \ & \phi(u, J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n)) \\ \leq \ & \alpha_n \phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, Tx_n) \\ \leq \ & \alpha_n \phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, x_n) \\ = \ & \phi(u, x_n). \end{aligned} \tag{9}$$

Do K_{r_n} là ánh xạ tựa ϕ-không giãn nên

$$\phi(u, v_n) = \phi(u, K_{r_n}x_n) \leq \phi(u, x_n). \tag{10}$$

Do đó, kết hợp (9) với (10) và sử dụng (4), ta được

$$\begin{aligned} & \phi(u, w_n) \\ = \ & \phi(u, J^{-1}(\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n)) \\ \leq \ & \gamma_n \phi(u, u_n) + (1-\gamma_n)\phi(u, Tv_n) \\ \leq \ & \gamma_n \phi(u, u_n) + (1-\gamma_n)\phi(u, v_n) \\ \leq \ & \gamma_n \phi(u, x_n) + (1-\gamma_n)\phi(u, x_n) \\ = \ & \phi(u, x_n). \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là $u \in C_{n+1}$. Do đó, $F \subset C_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Từ những chứng minh trên và kết hợp với giả thiết F là tập khác rỗng, ta suy ra C_n là tập lồi, đóng, khác rỗng. Sử dụng Bổ đề 7, ta có phép chiếu $\Pi_{C_n}x_0$ là xác định. Do đó, dãy $\{x_n\}$ xác định.

Bước 3. Chứng minh $\{\phi(x_n, x_0)\}$ hội tụ, $\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = 0$. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, vì $x_n = \Pi_{C_n}x_0$ nên theo Bổ đề 7 ta có

$$\phi(x_n, x_0) \leq \phi(z, x_0) \quad \text{với mọi} \quad z \in C_n. \tag{11}$$

Khi đó, với $u \in F$ ta có $u \in C_n$. Kết hợp với (11), ta có $\phi(x_n, x_0) \leq \phi(u, x_0)$. Điều này có nghĩa là $\{\phi(x_n, x_0)\}$ bị chặn. Mặt khác, vì $C_{n+1} \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}x_0 \in C_{n+1} \subset C_n. \tag{12}$$

Do đó, từ (11) và (12), ta được $\phi(x_n, x_0) \leq \phi(x_{n+1}, x_0)$ hay $\{\phi(x_n, x_0)\}$ là dãy đơn điệu tăng. Kết hợp với tính bị chặn của $\{\phi(x_n, x_0)\}$, ta suy ra tồn tại giới hạn của $\{\phi(x_n, x_0)\}$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, x_0) = r. \tag{13}$$

Mặt khác, vì $x_n = \Pi_{C_n}x_0$ nên theo Bổ đề 8 với mọi $u \in C_n$, ta có

$$\phi(u, x_n) + \phi(x_n, x_0) \leq \phi(u, x_0). \tag{14}$$

Kết hợp (14) với (12), ta được

$$0 \leq \phi(x_{n+1}, x_n) \leq \phi(x_{n+1}, x_0) - \phi(x_n, x_0). \tag{15}$$

Cho $n \to \infty$ trong (15) và sử dụng (13), suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{16}$$

Kết hợp điều này với Bổ đề 4, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{17}$$

Bước 4. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ đến $p \in C$.

Với mọi $m \geq n$, ta có $C_m \subset C_n$. Kết hợp điều này với (15), ta được

$$0 \leq \phi(x_m, x_n) \leq \phi(x_m, x_0) - \phi(x_n, x_0). \tag{18}$$

Từ (13), (18) và Bổ đề 4, suy ra

$$\lim_{m,n\to\infty} \phi(x_m, x_n) = \lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0.$$

Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong C. Mặt khác, do C là tập đóng trong E nên C có tính đầy đủ. Khi đó, tồn tại $p \in C$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p. \tag{19}$$

Bước 5. Chứng minh $p \in F$.

Trước hết, ta chứng minh $p \in F(T)$. Vì $x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}x_0 \in C_{n+1}$ nên theo định nghĩa của C_{n+1}, ta có

$$\phi(x_{n+1}, w_n) \leq \phi(x_{n+1}, x_n). \tag{20}$$

Sử dụng (16) và (20), ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, w_n) = 0.$$

Khi đó, từ Bổ đề 4 ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - w_n\| = 0. \tag{21}$$

Ta lại có

$$\|x_n - w_n\| \le \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - w_n\|.$$

Kết hợp điều này với (16), (21) và Bổ đề 5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - w_n\| = 0 \tag{22}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \|Jx_n - Jw_n\| = 0. \tag{23}$$

Mặt khác, với $u \in F$, ta có

$$\begin{aligned} & \phi(u, w_n) \\ = \;& \phi(u, J^{-1}(\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n)) \\ = \;& \|u\|^2 - 2\langle u, \gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n\rangle \\ & +\|\gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n\|^2 \\ \le \;& \|u\|^2 - 2\langle u, \gamma_n Ju_n + (1-\gamma_n)JTv_n\rangle \\ & +\gamma_n\|Ju_n\|^2 + (1-\gamma_n)\|JTv_n\|^2 \\ & -\gamma_n(1-\gamma_n)g(\|u_n - Tv_n\|) \\ \le \;& \phi(u, x_n) - \gamma_n(1-\gamma_n)g(\|u_n - Tv_n\|). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \gamma_n(1-\gamma_n)g(\|u_n - Tv_n\| \\ \le \;& \phi(u, x_n) - \phi(u, w_n). \end{aligned} \tag{24}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} & |\phi(u, x_n) - \phi(u, w_n)| \\ = \;& \left|2\langle u, Jw_n - Jx_n\rangle + \|x_n\|^2 - \|w_n\|^2\right| \\ \le \;& 2\left|\langle u, Jw_n - Jx_n\rangle\right| + |\,\|x_n\| - \|w_n\|| \\ & \times(\|x_n\| + \|w_n\|) \\ \le \;& 2\|u\|.\|Jw_n - Jx_n\| + \|x_n - w_n\| \\ & \times(\|x_n\| + \|w_n\|). \end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (22) và (23) , ta được $\lim_{n\to\infty} |\phi(u, x_n) - \phi(u, w_n)| = 0$. Kết hợp điều này với (24) và $\liminf_{n\to\infty} \gamma_n(1-\gamma_n) > 0$, ta được $\lim_{n\to\infty} g(\|Ju_n - JTv_n\|) = 0$. Khi đó, theo tính chất của hàm số g, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \|Ju_n - JTv_n\| = 0.$$

Sử dụng Bổ đề 5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - Tv_n\| = 0. \tag{25}$$

Mặt khác, ta có $Ju_n = \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n$. Suy ra $\|Ju_n - Jx_n\| = (1-\alpha_n)\|x_n - Tx_n\|$. Do $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ và $\{x_n\}$ bị chặn nên $\lim_{n\to\infty} \|Ju_n - Jx_n\| = 0$. Sử dụng Bổ đề 5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - x_n\| = 0. \tag{26}$$

Ta lại có

$$\|x_n - Tv_n\| \le \|u_n - x_n\| + \|u_n - Tv_n\|. \tag{27}$$

Khi đó, kết hợp (27) với (25), (26) và sử dụng Bổ đề 5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tv_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Jx_n - JTv_n\| = 0. \tag{28}$$

Mặt khác, vì $v_n = K_{r_n}x_n$, T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (ϕ-E_μ) và Bổ đề 6 nên với $u \in F$, ta có

$$\begin{aligned} \phi(v_n, x_n) \;&\le\; \phi(u, x_n) - \phi(u, v_n) \\ &\le\; \phi(u, x_n) - \phi(u, Tv_n). \end{aligned} \tag{29}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} & |\phi(u, x_n) - \phi(u, Tv_n)| \\ \le \;& 2\|u\|.\|JTv_n - Jx_n\| \\ & +\|x_n - Tv_n\|(\|x_n\| + \|Tv_n\|). \end{aligned} \tag{30}$$

Từ (28) và Bổ đề 5, khi cho $n \to \infty$ trong (29) và (30), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} \|v_n - x_n\| = 0 \tag{31}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \|Jv_n - Jx_n\| = 0. \tag{32}$$

Kết hợp (19), (31) và Bổ đề 5, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - p\| = \lim_{n\to\infty} \phi(v_n, p) = 0. \tag{33}$$

Ta lại có

$$\|v_n - Tv_n\| \le \|v_n - x_n\| + \|x_n - Tv_n\|. \tag{34}$$

Do đó, kết hợp (34) với (28) và (31), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - Tv_n\| = \lim_{n\to\infty} \phi(v_n, Tv_n) = 0. \tag{35}$$

Khi đó, từ (33), (35) và sử dụng Mệnh đề 16, ta được $p \in F(T)$.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh $p \in EP(f)$. Thật vậy, vì $v_n = K_{r_n}x_n$ nên theo Bổ đề 17, ta có

$$f(v_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - v_n, Jv_n - Jx_n\rangle \geq 0$$

với mọi $y \in E$. Khi đó, từ giả thiết (A2), ta có

$$\frac{1}{r_n}\langle y - v_n, Jv_n - Jx_n\rangle \geq -f(v_n, y) \geq f(y, v_n).$$

với mọi $y \in C$. Kết hợp điều này với điều kiện (A4), (32) và (33), ta được $f(y,p) \leq 0$ với mọi $y \in C$. Đặt $y_t = ty + (1-t)p$ với $t \in (0,1],\ y \in C$. Khi đó, $y_t \in C$ và $f(y_t, p) \leq 0$. Từ giả thiết (A1) và (A4), ta được

$$\begin{aligned} 0 = f(y_t, y_t) &\leq tf(y_t, y) + (1-t)f(y_t, p) \\ &\leq tf(y_t, y). \end{aligned}$$

Ta chia các vế của bất đẳng thức cho t, ta có $f(y_t, y) \geq 0$ với mọi $y \in E$. Cho $t \downarrow 0$ và sử dụng giả thiết (A3), ta được $f(p, y) \geq 0$ với mọi $y \in E$ và do đó $p \in EP(f)$. Kết hợp với $p \in F(T)$, ta được $p \in F$.

Bước 6. Chứng minh $p = \Pi_F x_0$.

Vì $x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}x_0$ nên sử dụng Bổ đề 8, ta có $\langle x_{n+1} - y, Jx_0 - Jx_{n+1}\rangle \geq 0$ với mọi $y \in C_{n+1}$. Với mọi $u \in F$, vì $F \subset C_{n+1}$ nên $u \in C_{n+1}$. Do đó,

$$\langle x_{n+1} - u, Jx_0 - Jx_{n+1}\rangle \geq 0. \tag{36}$$

Cho $n \to \infty$ trong (36), ta được

$$\langle p - u, Jx_0 - Jp\rangle \geq 0$$

với mọi $u \in F$. Theo Bổ đề 8, ta có $p = \Pi_F x_0$.

Lưu ý rằng khi E là không gian Hilbert thì $\phi(x,y) = \|x-y\|^2$ với mọi $x, y \in E$ và J là ánh xạ đồng nhất. Do đó, từ Định lí 20, ta nhận được kết quả về sự hội tụ của dãy lặp cho bài toán cân bằng và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert thực.

Hệ quả 21. *Cho E là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E, $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn các giả thiết* (A1) – (A4) *và $T : C \longrightarrow C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) sao cho $F := F(T) \cap EP(f) \neq \varnothing$. Xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in E,\ C_1 = C,\ x_1 = P_{C_1}x_0, \\ u_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ v_n = K_{r_n}x_n, \\ w_n = \gamma_n u_n + (1-\gamma_n)Tv_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - w_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0,\ n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

trong đó, K_{r_n} là ánh xạ xác định như trong Bổ đề 17 với J là ánh xạ đồng nhất, $0 \leq \alpha_n,\ \gamma_n \leq 1$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \gamma_n(1-\gamma_n) > 0$, $r_n \in [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $p = P_F x_0$.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa sự hội tụ dãy lặp cho bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$.

Ví dụ 22. Cho $E = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn $\|u\| = |u|$ với mọi $u \in E$. Khi đó, ánh xạ $J = I$ và phiếm hàm Lyapunov $\phi(u,v) = (u-v)^2$ với mọi $u, v \in E$. Xét bài toán (EP) sau:

Tìm $x \in C$sao cho $f(x,y) \geq 0$ với mọi $y \in C$,

trong đó, $C = [-1,1]$ và song hàm $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x,y) = -3x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{với mọi} \quad x, y \in C.$$

Khi đó, kiểm tra được f thỏa mãn các giả thiết (A1) – (A4). Thật vậy,

(A1) Với mọi $y \in C$, ta có

$$f(x,x) = -3x^2 + 2x^2 + x^2 = 0.$$

(A2) Với mọi $x, y \in C$, ta có

$$\begin{aligned} & f(x,y) + f(y,x) \\ = \ & -3x^2 + 2xy + y^2 - 2y^2 + yx + x^2 \\ = \ & -(x-y)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

(A3) Với mọi $y, z \in C$, ta có

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \downarrow 0} f(tz + (1-t)x, y) \\ = & \limsup_{t \downarrow 0} (-2(tz + (1-t)x)^2 \\ & \quad +(tz + (1-t)x)y + y^2) \\ = & -2x^2 + xy + y^2 \\ = & f(x, y). \end{aligned}$$

(A4) Với mỗi $x \in C$, $f(x, y) = -2x^2 + xy + y^2$ là hàm số lồi và nửa liên tục dưới.

Tiếp theo, ta xác định công thức của K_r được định nghĩa như trong Bổ đề 17. Với mọi $y \in C$ và $r > 0$, ta có

$$\begin{aligned} & f(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & ry^2 + (2rz + z - x)y - 3rz^2 + xz - z^2 \\ \geq \quad & 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Ta thấy $\varphi(y) = ry^2 + (2rz + z - x)y - 3rz^2 + xz - z^2$ là một hàm số bậc hai theo biến y. Do đó, (37) trở thành $\varphi(y) \geq 0$ với mọi $y \in C$ hay $\Delta = ((1 + 4r)z - x)^2 \leq 0$. Vì vậy $((1 + 3r)z - x) = 0$ hay $z = \dfrac{x}{4r + 1}$. Suy ra $K_r(x) = \dfrac{x}{4r + 1}$ với mọi $x \in C$. Theo Bổ đề 17, ta có $F(K_r) = EP(f) = \{0\}$. Bây giờ xét ánh xạ $T : C \longrightarrow C$ xác định trong Ví dụ 13. Ta cũng có $F(T) = \{-1; 0\}$. Khi đó, $F = F(T) \cap EP(f) = \{0\}$.

Bây giờ, chúng tôi mô tả dãy lặp trong Định lí 20. Chọn $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\gamma_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$, $a_n = \dfrac{1}{2}$, $r_n = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ trong Định lí 20 xác định bởi

$$x_0 \in E, \ C_1 = C, \ x_1 = P_{C_1} x_0,$$

$$u_n = \frac{n}{n+1} x_n + \frac{x_n}{(n+1)(2 + x_n)},$$

$$v_n = \frac{x_n}{5}, \ w_n = \frac{n+1}{2n+3} u_n + \frac{(n+2)x_n}{(2n+3)(2 + x_n)},$$

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : |w_n - z| \leq |x_n - z|\},$$

$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0.$$

Như vậy, theo Định lí 20, ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ đến $P_F x_0 = 0$.

IV. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã đưa ra một dãy lặp lai ghép mới để tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$, thiết lập được một định lí về sự hội tụ của dãy lặp này trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. Từ định lí này, chúng tôi nhận được một hệ quả về sự hội tụ của dãy lặp cho bài toán cân bằng và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert thực. Đồng thời, một ví dụ được đưa ra để minh họa cho sự hội tụ dãy lặp cho bài toán cân bằng và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$.

Lưu ý rằng ở mỗi bước lặp của dãy lặp trong Định lí 18, chúng ta phải tính toán tìm C_{n+1} với độ phức tạp cao. Tuy nhiên, với C_{n+1} trong Định lí 18, việc chứng minh sự hội tụ đơn giản, nhất là ở Bước 5. Đối với dãy lặp trong nghiên cứu này, việc tính toán C_{n+1} đơn giản hơn và kĩ thuật chứng minh sự hội tụ trong Định lí 20 đòi hỏi sự khéo léo hơn. Hơn nữa, với việc xét E là không gian Hilbert, chúng ta nhận được dạng dãy lặp trong [4, Theorem 3.1]. Do đó, các kết quả của nghiên cứu này là mở rộng các kết quả chính trong Alizadeh et al. [4] và cải tiến các kết quả chính trong Trương Cẩm Tiên và cộng sự [5].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math Stud*. 1994;63.

[2] Takahashi W, Zembayashi K. Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces. *Nonlinear Anal*. 2009;70.

[3] Qin X, Cho YJ, Kang SM. Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces. *J Comput Appl Math*. 2009;225.

[4] Alizadeh S, Moradlou F. A strong convergence theorem for equilibrium problems and generalized hybrid mappings. *Mediterr J Math*. 2016;13(1).

[5] Trương Cẩm Tiên, Nguyễn Trung Hiếu. Sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp cho bài toán cân bằng và ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(\phi\text{-}E_\mu)$ trong không gian Banach trơn đều và lồi đều. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*. 2017;27(8).

[6] Alber A. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. In: Kartosator A G, editor. *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*. vol. 178. Dekker, New York; 1996;15-50. .

[7] Kamimura S, Takahashi W. Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space. *SIAM J Optim*. 2002;13(3).

[8] Marino G, Xu H. Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces. *J Math Anal Appl*. 2007;329.

[9] Garcia-Falset J, Llorens-Fuster E, Suzuki T. Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings. *J Math Anal Appl*. 2011;375(1).

[10] Qin X, Cho YJ, Kang SM, Zhou H. Convergence of a modified Halpern-type iteration algorithm for quasi-ϕ-nonexpansive mappings. *Appl Math Lett*. 2009;22.